Sur l'activité combinatoire des enfants de 8 ans

In Psychologie Française

N°14
1968, pp.321-332

Psychologie Française, 1969, *14* (4), 321-332

SUR L'ACTIVITÉ COMBINATOIRE DES ENFANTS DE 8 ANS

par

Gérard VERGNAUD et Rachel COHEN *

Bien que l'on situe vers 11-12 ans le plein développement de l'activité combinatoire, il y a des réussites beaucoup plus précoces pour certaines formes de combinatoire lorsque le nombre d'éléments à combiner n'est pas trop grand. L'expérience rapportée ici porte sur un produit cartésien E × F (3 × 3) un produit carré E × E (3 × 3) et les permutations de 3 éléments. Dès 8 ans le premier est bien réussi mais les deux autres donnent encore une majorité d'échecs. L'analyse des procédures suivies montre à la fois l'existence précoce de procédures systématiques et un lien étroit entre la performance et la procédure. Une expérience menée auprès de petits de 5 ans bien préparés sur le plan scolaire ouvre des perspectives intéressantes. L'étude des procédures utilisées par les enfants se révèle intéressante, que celles-ci conduisent à l'échec ou à la réussite.

L'activité combinatoire commence avec la capacité de composer un objet *de différentes manières* avec d'autres objets. Cela suppose évidemment que le même objet soit considéré *plusieurs fois*, dans des *possibilités* différentes. L'activité combinatoire est donc liée, dès son apparition, à un certain développement (peut-être corrélatif) de la notion du possible ou de l'éventuel.

Mais la capacité de composer un objet de différentes manières avec d'autres objets n'implique pas la capacité d'engendrer toutes les possibilités, ni la capacité d'éviter les répétitions. Il faut donc distinguer, au-delà des *activités combinatoires élémentaires*, des *activités combinatoires supérieures* qui reposent sur des méthodes systématiques permettant d'engendrer les différents cas possibles de façon *exhaustive* et *sans répétition.*

Cette double définition nous oblige à la fois :

— à situer à un âge très précoce le début de l'activité combinatoire ;

— à considérer qu'elle se développe très lentement puisque l'enfant de 12 à 15 ans et l'adulte ont encore quelque difficulté à engendrer des possibles exhaustivement et sans répétition, même dans des cas relativement simples (permutations, par exemple).

C'est cette lenteur du développement de l'activité combinatoire

---

***Respectivement chargé de recherche au Centre national de la recherche scientifique et Directrice de l'Ecole active bilingue.**

qui a conduit Piaget à en faire une caractéristique du stade des opérations formelles. Mais il est intéressant d'étudier les aspects plus précoces de cette activité, et en particulier de voir comment s'élaborent les règles qui permettent l'exhaustivité et l'absence de répétition. En effet, dès que le nombre d'éléments à composer est plus grand que 3 ou 4, seule une règle systématique permet d'assurer la construction de la combinatoire.

Il n'est guère plausible que ces règles algorithmiques apparaissent tout à coup après 10 ans et c'est ce qui nous a conduits à une enquête auprès des enfants plus jeunes. Nous nous sommes demandé en particulier si, bien avant de savoir construire et manier les algorithmes combinatoires proprement dits, l'enfant ne se servait pas de certaines règles, inégalement efficaces, mais relativement strictes.

Les résultats ci-après ont été obtenus sur 138 enfants de la classe de CE2, dont l'âge est compris entre 7 ans ½ et 9 ans ½, la majorité d'entre eux se situant autour de 8 ans ½ au moment de l'épreuve. Les sujets appartenaient à différentes écoles de Paris (3 écoles communales, 3 écoles expérimentales) et à un milieu aisé.

Si nous avons choisi cet échantillon particulier, c'est dans le cadre d'une enquête dont le but principal était de comparer l'efficacité de diverses méthodes pédagogiques sur des enfants d'un milieu social comparable (cf. Rachel Cohen : *Contribution à l'étude différentielle de l'efficacité des méthodes pédagogiques*. Thèse de troisième cycle auprès la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Caen). L'étude qui fait l'objet du présent article porte sur une petite partie seulement des résultats obtenus, à savoir sur les performances atteintes en fonction des procédures suivies dans quatre épreuves de combinatoire et sur la difficulté relative de ces quatre épreuves. Les 138 sujets seront traités globalement et l'on ne trouvera pas ici de comparaison entre méthodes pédagogiques.

Les épreuves sont les suivantes, dans l'ordre de passation :

Le sujet devait trouver :

I. — Les couples d'un produit cartésien $E \times F$, E et F ayant chacun 3 éléments, donc 9 couples en tout.

II. — Les couples d'un produit cartésien $E \times E$, diagonale exclue, E ayant 3 éléments, donc 6 couples en tout.

III. — Les permutations de 3 éléments : 6 en tout.

IV. — Les permutations de 4 éléments : 24 en tout.

Notre hypothèse était que le produit $E \times F$ serait plus facile que le produit $E \times E$ et que les permutations, mais nous voulions en outre comparer entre elles ces deux dernières épreuves de sorte qu'il était nécessaire que le nombre des éléments à construire soit le même (6) dans les deux cas.

Nous avons introduit l'item difficile des permutations de 4 éléments afin d'avoir une épreuve dont il n'est vraisemblablement pas possible de venir à bout sans procédure systématique.

Enfin, nous avons introduit, à la suite de l'épreuve I sur le produit cartésien $E \times F$, une question I *bis*, sur le nombre de couples supplémentaires qu'entraîne l'adjonction d'un élément à l'ensemble E. Ce sont les travaux de Janine Rogalski sur le produit cartésien qui nous ont incités à poser cette question car elle permet une différenciation des performances des sujets qui réussissent à $E \times F$.

Pour les deux produits cartésiens $E \times F$ et $E \times E$, nous avons repris la présentation que F. Longeot en a faite (les couples de danseurs pour $E \times F$, les autos-tamponneuses pour $E \times E$). Pour les permutations, nous avons utilisé l'exemple de l'ordre dans lequel on peut prendre n desserts différents. On trouvera en annexe la feuille d'épreuves. La consigne était explicitée sur un exemple dans chaque épreuve. La passation était collective (groupes de 20 à 25 sujets).

Résultats

Les 138 sujets n'ont pas tous fourni une réponse à toutes les épreuves et l'analyse qui suit porte sur des effectifs variables d'une épreuve à l'autre, mais toujours inférieurs à 138.

Pour les comparaisons entre épreuves qu'on trouvera plus loin, nous n'avons retenu que les 114 sujets qui ont fourni une réponse à toutes les épreuves.

I. — *Le produit cartésien $E \times F$.*

Pour voir les implications de la procédure utilisée sur la performance, nous avons distingué :

3 niveaux de performance — énumération des 9 couples différents
— énumération de 6 à 8 couples différents
— énumération de 5 couples différents ou moins.

avec les 2 sous-niveaux suivants, selon que le sujet a évité les répétitions ou non :

— sans répétition
— avec répétition.

2 types de procédures — une procédure de type alphabétique, notée α qui peut prendre diverses formes.
AL, AM, AN, BL ....
ou AL, BL, CL, AM ....
ou AM, AN, AL, BM ....
etc. ...
l'essentiel étant le caractère régulier de la série ainsi formée.
nous avons noté $\bar{\alpha}$ tout ce qui n'obéit pas à une règle de type alphabétique.

Le tableau I rassemble les résultats obtenus, les tableaux Ia, Ib, et Ic condensent le tableau I.

L'examen de ces tableaux permet les conclusions suivantes :

1° La procédure α favorise considérablement la réussite : 9 couples sans répétition (Ia).

2° Mais il est toutefois possible de réussir sans suivre une procédure tout à fait systématique (Ia).

3° La procédure α permet d'éviter presque complètement les répétitions (Ib).

4° Mais elle n'assure pas complètement l'exhaustivité (Ic).

Nous verrons, avec les autres épreuves, que certaines procédures entraînent presque systématiquement l'échec. C'est le cas, dans cette épreuve-ci, pour la procédure qui consiste à engendrer d'abord la diagonale (ou le pivot) du produit cartésien

AL, BM, CN

car les sujets s'arrêtent assez souvent là, faute de réutiliser chaque élément de E ou de F dans d'autres combinaisons. Mais 6 sujets seulement ont pratiqué ainsi : on les retrouve parmi les 23 sujets de la 5e ligne du tableau I.

RÉSULTATS à E x F

TABLEAU I

Performance			Procédure α	Procédure $\bar{\alpha}$	Total
	9	sans répétition	58	18	76
		avec répétition	0	6	6
	6 à 8	sans répétition	3	16	19
		avec répétition	1	7	8
	$\leqslant$ 5	sans répétition	0	23	23
		avec répétition	0	3	3
Total			62	73	135

TABLEAU Ia

	α	$\bar{\alpha}$	
réussite	58	18	76
échec .	4	55	59
	62	73	135

TABLEAU Ib

	α	$\bar{\alpha}$	
sans répétition ...	61	57	118
avec répétition ..	1	16	17
	62	73	135

TABLEAU Ic

	α	$\bar{\alpha}$	
exhaustif	58	24	82
non exhaustif ...	4	49	53
	62	73	135

II. — *Le produit cartésien $E \times E$ (diagonale exclue).*

Nous avons distingué :

2 niveaux de performance — énumération des 6 couples différents
— énumération de moins de 6 couples différents.

avec les 2 sous-niveaux :

— sans répétion
— avec répétition.

4 types de procédure — une procédure de type alphabétique, notée α,

qui peut prendre diverses formes.
CD, CP, DC, DP, PC, PD
DC, DP, CD, CP, PD, PC
ou toute autre série qui conserve un ordre sur les 3 lettres.

— une procédure symétrique notée *sym*, qui consiste à engendrer les couples deux par deux, chacun étant le symétrique de l'autre.
Exemple : CD DC
CP PC
DP PD

— une procédure circulaire, notée *circ*, qui consiste à utiliser le second élément du couple précédent comme premier élément du couple suivant.
Exemple : CD, DP, PC, CP...

— nous avons noté *sans syst*, tout ce qui n'obéit pas, apparemment, à une règle systématique.

Le tableau II rassemble les résultats obtenus. Les tableaux IIa, IIb et IIc condensent le tableau II. Les tableaux IId et IIe permettent des comparaisons plus fines entre procédures.

L'examen de ces tableaux permet les conclusions suivantes

1° Les procédures α et *sym* favorisent la réussite : 6 couples sans répétition (IIa).

2° Comme pour le produit E $\times$ F, il est possible de réussir sans suivre une procédure tout à fait systématique (II et IIa).

3° Comme pour E $\times$ F, si les procédures α et *sym* permettent d'éviter les répétitions, elles n'assurent pas complètement l'exhaustivité (IIb, IIe).

4° La procédure α semble supérieure à la procédure *sym* mais de façon non significative (IId).

5° La procédure *circ* entraîne plus d'échecs que l'absence (apparente) de règle (IIe) et cela confirme ce que nous avons déjà vu pour le produit E $\times$ F : cette procédure est néfaste.

Le caractère néfaste de la procédure *circ* tient sans aucun doute au fait qu'elle induit à tort, dès que la première boucle est bouclée, l'idée que tous les facteurs de variation ont été pris en considération. Toutefois elle permet d'éviter presque complètement les répétitions (II).

RÉSULTATS à ExE

Tableau II

			Procédure				
			α	sym	circ	sans syst.	Total
Performance	6	sans répétition ...	24	10	3	13	50
		avec répétition ..	0	0	0	2	2
	— de 6	sans répétition ...	3	7	19	39	68
		avec répétition ..	0	0	1	7	8
		Total	27	17	23	61	128

Tableau IIa

	α ou sym	circ ou sans syst.	
réussite	34	16	50
échec	10	68	78
	44	84	128

Tableau IIb

	α ou sym	circ ou sans syst.	
sans répétition ...	44	74	118
avec répétition ..	0	10	10
	44	84	128

Tableau IIc

	α ou sym	circ ou sans syst.	
exhaustif	34	18	52
non exhaustif ...	10	66	76
	44	84	128

Tableau IId

	α	sym	
réussite	24	10	34
échec	3	7	10
	27	17	44

Tableau IIe

	circ	sans syst.	
réussite	3	13	16
échec	20	48	68
	23	61	84

III. — *Les permutations de 3 éléments.*

Nous avons distingué :

2 niveaux de performance — énumération des 6 triplets différents
énumération de moins de 6 triplets différents.

avec les 2 sous-niveaux
— sans répitition
— avec répétition.

4 types de procédure — une procédure de type alphabétique, notée α,
qui peut prendre diverses formes
BCT, BTC, CBT...
CTB, CBT, TCB...
ou tout autre série qui conserve un ordre sur les 3 lettres.

une procédure notée *sym*, qui consiste à tenir un élément constant et à opérer une symétrie sur les deux autres : les triplets vont ainsi par deux.

Exemple : 2e constant BCT TCB
TBC CBT
BTC CTB
ou 3e constant BCT CBT
TBC BTC
CTB TCB

— une procédure circulaire, notée *circ*, qui consiste à utiliser le dernier élément du triplet précédent comme premier élément du triplet suivant (ou l'inverse).
Exemple : BTC, CBT, TCB

nous avons noté *sans syst*, tout ce qui n'obéit pas, apparemment, à une règle systématique.

Le tableau III rassemble les résultats obtenus et les autres tableaux jouent le même rôle que précédemment. Les conclusions sont les mêmes que pour le produit E × E.

RÉSULTATS AUX PERMUTATIONS DE TROIS ÉLÉMENTS

Tableau III

Performance			Procédure				
			α	sym	circ	sans syst.	Total
	6	sans répétition ...	6	27	4	17	54
		avec répétition ..	0	0	0	2	2
	— de 6	sans répétition ...	0	16	18	40	74
		avec répétition ..	0	1	0	3	4
		Total	6	44	22	62	134

Tableau IIIa

	α ou sym	circ ou sans syst.	
réussite	33	21	54
échec	17	63	80
	50	84	134

Tableau IIIb

	α ou sym	circ ou sans syst.	
sans répétition ...	49	79	128
avec répétition ..	1	5	6
	50	84	134

Tableau IIIc

	α ou sym	circ ou sans syst.	
exhaustif	33	23	56
non exhaustif ...	17	61	78
	50	84	134

Tableau IIId

	α	sym	
réussite	6	27	33
échec	0	17	17
	6	44	50

Tableau IIIe

	circ	sans syst.	
réussite	4	17	21
échec	18	45	63
	22	62	84

IV. — *Les permutations de 4 éléments.*

Cette épreuve est de loin la plus difficile : 1 sujet seulement a réussi complètement cette épreuve, mais 5 sujets ont engendré plus des 2/3 des cas possibles, ce qui constitue déjà une très bonne performance.

Nous avons fait une analyse moins détaillée que pour les épreuves précédentes.

Nous avons distingué :

3 niveaux de performance — énumération de 17 à 24 quadruplets différents.

— énumération de 9 à 16 quadruplets différents.

— énumération de 1 à 8 quadruplets différents.

3 types de procédure — une procédure, notée 1er *const*, qui consiste à garder constant le premier élément et à trouver les 6 permutations des 3 autres éléments. Cette procédure est de type alphabétique mais elle fait quelques entorses à la règle purement alphabétique.

Exemple non strictement alphabétique :

BTCY BCTY
BCYT BYCT
BYCT BYTC
TBCY etc.

— une procédure notée *trous*, qui consiste à travailler à partir d'une permutation de 3 éléments et à placer le 4e aux 4 places possibles comme dans l'exemple suivant :
YBTC BYTC BTYC BTCY YBCT, etc.

— nous avons noté *sans syst*, tout ce qui n'obéit pas, apparemment, à une règle systématique.

Le tableau IV rassemble les résultats obtenus. On voit, là encore, que les procédures systématiques, notamment la procédure de type alphabétique, améliorent nettement la performance, ce qui n'est d'ailleurs pas étonnant.

TABLEAU IV

		Procédure			
		1er const. ou α	trous	sans syst.	total
Performance	17 à 24	3	1	1	5
	9 à 16	11	6	25	42
	1 à 8	2	10	71	83
	total	16	17	97	130

V. — *Comparaison entre épreuves.*

L'épreuve des permutations de 4 éléments est si difficile pour les enfants de notre échantillon (une seule réussite) que nous nous limiterons, dans nos comparaisons, aux 4 autres épreuves. Sur 114 sujets ayant fourni une réponse à ces 4 épreuves :

70 ont réussi E × F
55 ont réussi l'item arithmétique
50 ont réussi les permutations de 3 éléments
48 ont réussi E × E.

Les 3 dernières épreuves sont donc d'une difficulté comparable et nous nous sommes limités, pour rechercher une éventuelle hiérarchie, à la comparaison de chacune de ces 3 épreuves avec la première.

Les tableaux Va, Vb et Vc montrent que la hiérarchie existe, mais qu'elle est faible puisque, dans les 3 cas, un nombre non négligeable de sujets réussissent l'épreuve la plus difficile et échouent à la plus facile.

TABLEAU Va

		E x E	
		réussite	échec
E x F	réussite ..	36	34
	échec ...	12	32

TABLEAU Vb

		Permutations de 3	
		réussite	échec
E x F	réussite ..	39	31
	échec ...	11	33

TABLEAU Vc

		Item arithmétique	
		réussite	échec
E x F	réussite ..	40	30
	échec ...	15	29

Si l'on considère les procédures suivies dans les différentes épreuves, on s'aperçoit que les sujets sont plus volontiers systématiques dans E × F que dans les deux autres épreuves, mais là encore la hiérarchie est faible (tableaux VIa, VIb, VIc).

Tableau VIa

		E x E	
		syst.	non syst.
E x F	syst	25	34
	non syst.	18	44

Tableau VIb

		Permutation de 3	
		syst	non syst.
E x F	syst	29	30
	non syst.	18	44

Tableau VIc

		Permutations de 3	
		syst	non syst.
E x E	syst	18	25
	non syst.	29	49

Enfin, la comparaison des tableaux I, II et III montre que la procédure de type alphabétique est plus facilement adoptée dans les épreuves de produit que dans les permutations. Cela n'est pas étonnant, si l'on considère que, dans les permutations, il faut une récursion supplémentaire (sur la 3e place).

Conclusions

Une étude menée avec des examens collectifs, comme celle-ci, ne saurait apporter autant d'information que les examens individuels. Toutefois elle permet d'affirmer que l'activité combinatoire est déjà passablement organisée chez l'enfant de 8 ans par la mise en œuvre de procédures systématiques (qui n'avaient en aucun cas fait l'objet d'un apprentissage scolaire chez les sujets considérés). Une procédure généralisable à tous les cas de combinatoire, la procédure dite alphabétique, fonctionne très tôt, et de façon rigoureuse chez certains sujets. Des expériences pédagogiques, menées depuis que cette étude a été faite, montrent que les enfants de l'âge considéré sont presque tous capables avec un guidage préalable du maître, de comprendre et de mener à bien les types de tâches examinées ici.

Il est même possible de faire des exercices de combinatoire avec des enfants d'un âge plus tendre. C'est ainsi que, dans le cadre de l'enseignement expérimental de mathématiques à l'Ecole active bilingue, il a été demandé à des enfants de 5 ans de réaliser les 6 permutations de 3 éléments avec des gommettes de couleur sur une feuille où avaient été préalablement tracés les 6 colonnes nécessaires.

Il est clair que ce dernier point ne pouvait que faciliter le travail des enfants, dans la mesure où les 6 colonnes vides ne demandaient qu'à être remplies. D'autre part, la maîtresse (1) avait travaillé longuement avec les enfants les questions de l'ordre spatial et de la différence entre deux permutations de 3 éléments.

Il n'en reste pas moins que les résultats sont surprenants.

Sur 22 enfants

— 14 sujets ont trouvé les 6 triplets sans répétition,
— 8 sujets ont échoué et n'ont trouvé que 4 ou 5 triplets distincts (parmi ces derniers 5 sujets ont fait des répétitions).

Parmi ceux qui ont réussi :

1 sujet a adopté la procédure alphabétique pure,
3 sujets ont adopté la procédure consistant à tenir un élément constant et à opérer une symétrie sur les 2 autres,
3 sujets ont adopté la procédure circulaire.

Il est intéressant de noter, à ce point, que la procédure circulaire peut coduire au succès si l'enfant a le moyen de comprendre qu'il ne faut pas s'arrêter après le 3e triplet (les 6 colonnes tracées à l'avance favorisaient cela).

7 sujets n'ont pas suivi une même procédure d'un bout à l'autre ; mais, à l'exception d'un sujet, on trouve toujours des séries de type circulaire (4 sujets) ou des symétries répétées sur les mêmes places (2 sujets).

Quant aux 8 échecs, on ne trouve pas de régularité dans les séries produites.

Il y a un grand intérêt théorique, à notre avis, à considérer -

1° *L'existence de procédures aussi systématiques chez le jeune enfant* et cela confirme ce que nous avons soutenu dans un travail antérieur sur l'importance de l'étude des règles de conduite.

2° *La qualité des performances des enfants qui ont bénéficié d'un travail préalable :* les enfants de 5 ans, entraînés, réussissent mieux que les enfants de 8 ans, non entraînés. Ce décalage, dans des tâches réputées difficiles, et qui semblent particulièrement soumises aux contraintes génétiques, pose une question de méthode : l'expérimentation pédagogique permet-elle d'aborder sous un angle nouveau l'étude des contraintes du développement ? En particulier dans quelles limites permet-elle d'infléchir les règles de production que se donne l'enfant ?

---

(1) Mlle Sicoviac, que nous remercions vivement ici.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

INHELDER (B.) et PIAGET (J.). — *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent.* Paris, P.U.F., 1955.

LONGEOT (F.). — *Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence,* Paris, Dunod, 1969.

PIAGET (J.) et INHELDER (B.). — *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris, P.U.F., 1951.

ROGALSKI (J.). — Recherches sur la genèse du produit cartésien (thèse en préparation).

VERGNAUD (G.). — *La réponse instrumentale comme solution de problème : contribution.* Thèse de doctorat de troisième cycle, faculté des Lettres et Sciences humaines, Paris, 1968 (à paraître).

ANNEXE épreuve

1° *Au bal.*

a) Après un repas de famille, on décide de danser. Il y a

3 hommes Albert	A	et 3 filles Louise	L
Bertrand	B	Monique	M
Charles	C	Nicole	N

Chacun peut danser avec chacune.
Pouvez-vous écrire tous les couples qui sont possibles ?

b) Si le cousin Daniel D arrive, combien cela fait-il de couples possibles en plus ?

2° *Les autos tamponneuses*

Daniel, Clément et Paul vont à la fête faire de l'auto tamponneuse.
D C P
Il n'y a que deux places par auto.
Chacun des garçons veut être à son tour le conducteur et le voisin du conducteur.
Quelles sont toutes les manières possibles de composer les voitures ?

3° *Les desserts :*

a) Vous avez le droit de manger trois sortes de desserts
— une banane B
— une tarte T
— une crème C

Vous pouvez les manger dans tous les ordres possibles.
Quels sont tous les ordres possibles ?

b) S'il y a un 4e dessert, un yaourt Y par exemple, pouvez-vous écrire toutes les façons qu'il y a de manger 4 desserts ?