



Gérard Vergnaud

Recherches en psychologie didactique

Ce document est issu du
site officiel de Gérard Vergnaud

www.gerard-vergnaud.org

Ce document a été numérisé afin de rester le plus fidèle possible à l'original qui a servi à cette numérisation. Certaines erreurs de texte ou de reproduction sont possibles.

Vous pouvez nous signaler les erreurs ou vos remarques via le site internet.

Cheminelements dans le permutoèdre chez les enfants

In Ordres totaux finis

Gauthier-Villars-Mouton, Paris (Ed.)
1971, pp133-139

Lien internet permanent pour l'article :

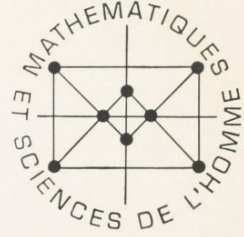
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1971_Cheminements-Permutoedre_Ordres-Totaux-Finis

Ce texte est soumis à droit d'auteur et de reproduction.

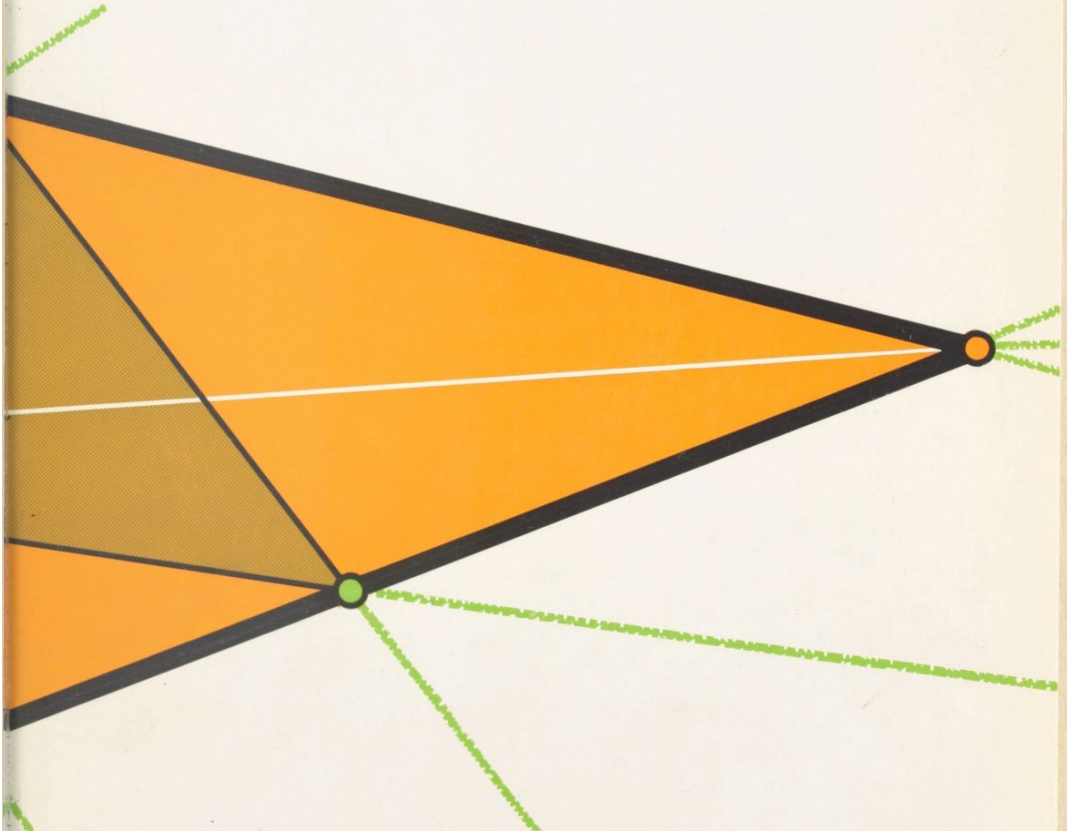
Séminaire sur les ordres totaux finis
des groupes de l'homme

5
17

ORDRES



TOTAUX FINIS



GAUTHIER-VILLARS/PARIS
MOUTON/PARIS/LA HAYE

CHEMINEMENTS DANS LE PERMUTOÈDRE CHEZ LES ENFANTS

G. VERGNAUD (1)

L'action instrumentale consiste à transformer le monde extérieur, ou encore à modifier les relations des objets entre eux. Les permutations sont un exemple particulièrement simple de ces modifications comme le sont d'une façon générale les déplacements d'objets dans l'espace. On peut même attribuer un caractère paradigmatique à ces déplacements, du point de vue de l'ontogenèse des représentations causales. Mais c'est surtout dans le but de montrer le caractère *transformationnel* de l'action instrumentale que j'ai fait les expériences qui suivent, sur le passage d'une permutation à une autre par une suite de transpositions (échange d'éléments voisins). L'analyse des procédures suivies par les sujets m'a amené ensuite à dégager la notion d'*algorithme spontané*.

I. — PROCÉDURE EXPÉRIMENTALE

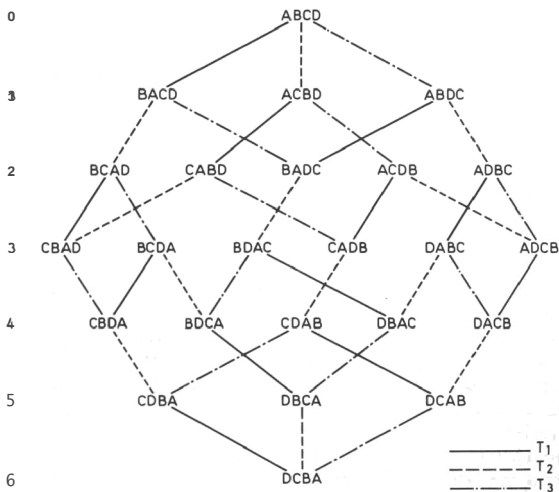
J'ai travaillé exclusivement avec les permutations de quatre éléments. Soient les vingt-quatre permutations de quatre éléments, dessinées sur le treillis ci-après : elles sont rangées de haut en bas selon le nombre de transpositions nécessaires pour revenir au sommet ABCD : une transposition consiste dans l'échange de deux éléments voisins.

l'échange des deux éléments de gauche	T ₁
l'échange des deux éléments du milieu	T ₂
l'échange des deux éléments de droite	T ₃

On peut passer du sommet ABCD à une permutation quelconque du treillis, par une suite de transpositions : par exemple, pour passer de ABCD

(1) Laboratoire de Psychologie, E. P. H. E., 6^e section.

ligne



à BDCA (ligne 4) on peut prendre plusieurs chemins, tous aussi courts les uns que les autres.

$$\begin{aligned} ABCD &\xrightarrow{T_1} BACD \xrightarrow{T_2} BCAD \xrightarrow{T_3} BCDA \xrightarrow{T_2} BDCA \\ ABCD &\xrightarrow{T_1} BACD \xrightarrow{T_3} BADC \xrightarrow{T_2} BDAC \xrightarrow{T_3} BDCA \\ ABCD &\xrightarrow{T_3} ABDC \xrightarrow{T_1} BADC \xrightarrow{T_2} BDAC \xrightarrow{T_3} BDCA \end{aligned}$$

On peut prendre aussi un chemin plus long, par exemple :

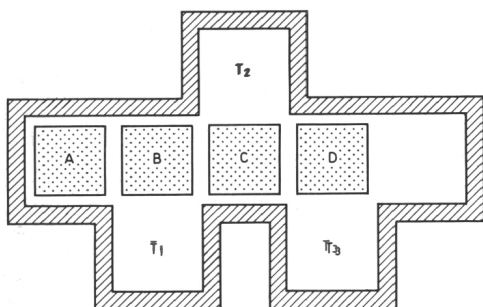
$$ABCD \xrightarrow{T_3} ABDC \xrightarrow{T_2} ADBC \xrightarrow{T_1} DABC \xrightarrow{T_2} DBAC \xrightarrow{T_1} DBCA \xrightarrow{T_1} DBCA$$

J'ai utilisé trois sortes de dispositifs expérimentaux.

Premier dispositif : le taquin

Il est constitué de quatre éléments mobiles (rouge, bleu, rose, jaune), d'une voie à cinq places et de trois garages ainsi que l'indique la figure ci-des-

sous ; je l'ai appelé « taquin », du nom du jeu de société bien connu qui consiste justement à permuter des pions carrés dans le plan.



Chaque problème consiste alors à :

- réaliser une certaine permutation des quatre éléments sur le taquin (point de départ) ;
- présenter sur une carte la permutation qu'on demande à l'enfant de réaliser en se servant des garages (point d'arrivée).

L'expérimentateur note la suite des garages utilisés (et donc des transpositions) et présente une série de problèmes.

Comme on peut choisir n'importe quel point de départ et n'importe quel point d'arrivée, le nombre des problèmes est très grand ($24 \times 23 = 552$), mais du point de vue de la complexité, il n'y a que 23 classes de problèmes. Partant de l'idée que le nombre de transpositions minimum pour passer du point de départ au point d'arrivée est une assez bonne approximation de la complexité, nous avons choisi de donner d'abord un problème de la ligne 1, puis, s'il est réussi et seulement dans ce cas, un problème de la ligne 2, . . . , et ainsi de suite jusqu'à la ligne 6 ; en cas d'échec on donne un problème de la même ligne.

Deuxième dispositif : les trois cartes

Passer d'une permutation à une autre, c'est faire une suite de transformations mais c'est aussi passer par une suite d'états intermédiaires : on

peut considérer qu'il est formellement équivalent d'écrire l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{ABCD} & \xrightarrow{(T_3, T_1, T_2, T_3)} & \text{BDCA} \\ \text{ABCD} & \xrightarrow{(ABDC, BADC, BDAC)} & \text{BDCA} \end{array}$$

et il y a donc une bijection entre les n -uples de transpositions et les $(n - 1)$ -uples d'états intermédiaires correspondants.

J'ai fait travailler les enfants sur les seuls états intermédiaires en me servant uniquement de cartes représentant les 24 permutations. Chaque problème se présente alors comme un couple de cartes (point de départ, point d'arrivée). Comme le sujet a le choix, lorsqu'il travaille avec le taquin, entre trois transpositions, j'ai fourni au sujet, en plus du point de départ et du point d'arrivée, les trois cartes qui se déduisent du point de départ par une seule transposition, et je lui ai demandé de choisir, parmi ces trois cartes, celle qui le rapprochait le plus du point d'arrivée. Lorsque son choix est fait, on retire les deux autres cartes et la carte « point de départ » et on lui propose de nouveau les trois cartes qui se déduisent par une transposition de la carte qu'il vient de choisir. On se rapproche ainsi au maximum, formellement, des conditions du taquin. A rigoureusement parler, un problème comportant n transpositions avec le taquin est en fait formellement équivalent (du point de vue de l'arbre des choix possibles) à un problème comportant $n + 1$ transpositions avec les cartes ; mais cette considération est inutile au regard des résultats obtenus.

Troisième dispositif : le taquin en aveugle

Afin de mettre encore mieux en évidence l'importance que présentent pour le sujet les transformations concrètes, j'ai fait passer l'épreuve du taquin en aveugle, c'est-à-dire en privant le sujet du contrôle que lui fournissent les états intermédiaires. La procédure est alors la suivante :

— une certaine permutation est réalisée à la fois sur le taquin et sur la carte (point de départ).

— On fait constater au sujet la congruence, puis on retourne les éléments un par un de telle sorte qu'on ne voit plus les couleurs du verso qui servent à les distinguer.

II. — RÉSULTATS

J'ai examiné 55 sujets âgés de 4 ans 6 mois à 13 ans 10 mois comprenant 21 garçons et filles d'une école maternelle et 34 garçons d'une école communale (région parisienne). Tous les sujets ont commencé par le premier

dispositif (taquin avec information totale) et les plus grands ont ensuite été soumis aux deux autres dispositifs expérimentaux (trois cartes, taquin en aveugle) tantôt dans un ordre, tantôt dans l'autre. Les meilleurs parmi les petits de l'école maternelle ont également travaillé avec le troisième dispositif, mais je leur ai épargné le dispositif des trois cartes.

1° Le caractère transformationnel de l'action instrumentale

La question principale était de savoir si dans des situations formellement équivalentes, les sujets réussissaient mieux avec le premier dispositif (taquin) dans lequel les sujets opèrent effectivement les transformations, ou avec le deuxième dispositif (trois cartes) dans lequel les sujets n'ont accès qu'aux états intermédiaires. Les résultats sont à cet égard extrêmement nets puisque les problèmes les plus complexes sont résolus vers 6 ou 7 ans par la totalité des enfants avec le taquin, alors que les enfants de 11 ans ne résolvent encore, avec le dispositif des trois cartes, que des problèmes d'ordre 2 (qui supposent deux transpositions au moins). Si l'on regarde ce que font les sujets les meilleurs, ce n'est que vers 10 ans qu'une proportion importante (50 %) de sujets réussit, avec les cartes, des problèmes assez complexes (d'ordre 4). Cette difficulté du deuxième dispositif ne tient pas à la consigne puisque les enfants, y compris ceux de 6 ans, sont capables de la comprendre et de réussir les problèmes d'ordre 2, l'échec des sujets est donc relatif à l'enchaînement des choix qui constitue la question centrale de l'action instrumentale.

Si les enfants de 6 ans réussissent les problèmes les plus difficiles avec le taquin, c'est que la capacité de composer en une suite ordonnée des transpositions n'est pas subordonnée, comme on pourrait le croire, à la capacité combinatoire d'engendrer systématiquement toutes les permutations de 4 éléments (car celle-ci n'apparaît que beaucoup plus tard). Nous verrons plus loin qu'il existe bien des règles systématiques, mais d'un autre ordre.

Si les enfants échouent avec le deuxième dispositif, c'est que celui-ci permet beaucoup moins que le premier le découpage du but en sous-buts et empêche ainsi l'application des procédures systématiques que nous verrons plus loin. D'autre part cette expérience montre que ce n'est pas la même chose d'effectuer une transformation en imaginant l'état auquel elle conduit et d'imaginer une transformation en connaissant l'état auquel elle doit conduire. C'est là un domaine d'investigation très important pour la psychologie.

La comparaison des résultats obtenus avec les trois cartes (2^e dispositif) et avec le taquin en aveugle (3^e dispositif) renforce encore la thèse que la

réponse instrumentale est fondamentalement transformationnelle et ne consiste pas en une simple liaison entre états. En effet, bien que le dispositif du taquin aveugle prive le sujet de tout contrôle des états intermédiaires et impose une contrainte assez considérable à la mémoire, il donne lieu, en moyenne, à plus de réussites que le dispositif des trois cartes. Comme il met la mémoire à forte contribution, on pouvait s'attendre à de grosses différences individuelles, et en effet des enfants de 6 ans réussissent là où des enfants de 10 ans échouent encore, mais à tous les âges, le niveau de complexité atteint par 50 % des sujets est toujours plus élevé avec le taquin en aveugle qu'avec les trois cartes.

2° Le caractère algorithmique des chemins suivis

Pour l'analyse des chemins suivis, nous avons retenu seulement les résultats obtenus avec le premier dispositif et une analyse semblable avec les autres dispositifs supposerait plus de réussites aux problèmes complexes que nous n'en avons obtenues. Les deux résultats principaux sont les suivants :

1) La proportion de chemins non minimaux reste toujours faible puisque, à 6 ans, moins d'un tiers des chemins utilisés sont plus longs que nécessaire : cette proportion diminue évidemment avec l'âge et tombe aux environs de 15 % à 10 ans.

Certains problèmes donnent lieu à plus de chemins non minimaux que d'autres et cela tient à la fois au nombre de chemins minimaux possibles et à la structure propre du problème ; c'est ainsi que, pour les problèmes d'ordre 4, on obtient le tableau suivant :

	Problème CDAB	Autres problèmes d'ordre 4	Total
Chemins minimaux	7	33	40
Chemins non minimaux.	11	6	17
Total	18	39	57

Cette différence significative au seuil de 0.01 ($\chi^2 = 11$, $d^{\circ} l. = 1$) est due à la conjonction, sur le problème CDAB, de deux sources de difficultés :

- 2 chemins minimaux au lieu de 3 pour les autres problèmes ;
- nécessité de commencer par T_2 .

2) Les chemins minimaux effectivement pris ne se distribuent pas également sur les chemins possibles et les chemins majoritaires sont ceux qui consistent à suivre un algorithme simple comme le suivant.

- Adopter un sens de parcours, de gauche à droite ;
- considérer l'élément qui doit, dans la permutation finale, être le plus à gauche ;
 - s'il est en place, passer au suivant,
 - s'il n'y est pas, aller le chercher et l'y amener, puis passer au suivant, et ainsi de suite...

Si nous appelons « algorithme gauche » cette procédure, il est clair qu'il existe un « algorithme droite », symétrique du premier.

Dans tous les cas où on peut distinguer, parmi les chemins minimaux, ceux qui sont dus à ces algorithmes et ceux qui ne le sont pas, on trouve que la fréquence des chemins « algorithmiques » est supérieure à leur probabilité *a priori*, y compris chez les très jeunes enfants. On ne peut interpréter ce fait que par l'existence d'algorithmes spontanés, lesquels permettent ici non seulement de trouver une solution mais de trouver une solution minimale. Nous avons trouvé, avec d'autres matériels mais à un âge aussi précoce, des algorithmes de solution non minimaux, qui confirment la thèse de la précocité de l'activité rationnelle.
