Règles de production et représentation calculable dans la solution de problème

Simple Texte introductif à la recherche d'un cadre théorique

1975 (environ), 8 pages

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1975_Representation-Calculable_Texte-Recherche-Theorique

G. VERGNAUD

Règles de production et représentation calculable dans la solution de problème

La question théorique fondamentale dans l'étude de la solution de problème est de savoir quels concepts fondamentaux il faut poser pour l'aborder avec quelque chance de succès.

Si les concepts utilisés sont trop faibles et j'en citerai quelques-uns qui me semblent insuffisants, comme ceux de liaison conditionnelle, de mémoire, d'apprentissage associatif, alors une bonne partie de l'activité du sujet risque de nous échapper. Inversement si l'on se donne trop de choses comme par exemple la capacité parfaite de déduction du sujet, alors on risque d'avoir une vue trop normative de l'activité de solution de problèmes.

Pour ma part je considère que deux concepts jouent un rôle central.
. celui de "règle de production"
. celui de "représentation" et plus précisément de "représentation calculable"

<u>Pourquoi</u> : ?
Qu'observe-t-on lorsqu'un sujet essaye de résoudre un problème ?
. en premier lieu une suite d'actions ou d'opérations du sujet,
. en second lieu une suite de transformations de la réalité ainsi opérée.

La notion de règle de production est rendue nécessaire par le fait qu'il faut rendre compte de l'enchaînement des actions et des opérations en fonction de l'évolution de la situation. Il est nécessaire de fournir un modèle de l'enchaînement des réponses élémentaires puisque c'est cet enchaînement qui constitue la réponse instrumentale.

La notion de "représentation" et plus précisément de "représentation calculable" est imposée par le fait que ces règles de production sont elles-mêmes liées aux relations présentes dans la réalité ou du moins dans la <u>représentation</u>

que s'en fait le sujet. Ces relations et les règles de production du sujet sont en fait l'objet d'un véritable calcul relationnel, d'où l'idée de représentation calculable.

Beaucoup de situations concrètes dans lesquelles on peut définir la réalité transformée rentrent dans ce schéma et aussi beaucoup de situations plus abstraites dans lesquelles les actions et opérations du sujet ne portent pas sur une réalité matérielle.

<u>1er exemple</u> : <u>Des expériences de déverrouillage</u>
Dans des expériences faites sur des enfants à partir de 4 ans, nous avons pu mettre en évide ce des règles de production qui constituent de véritables algorithmes de solution. De plus ces règles évoluent avec l'âge et plus précisément avec les relations que le sujet est capable d'appréhender ou de se représenter. Les contraintes génétiques concernant les règles de production sont semblables à celles qui concernent les relations : exemple de la transitivité.

<u>2ème exemple</u> : <u>Les permutations d'objets dans l'espace</u>
Là encore il existe très tôt des règles stables et des algorithmes et on peut considérer que la suite des opérations du sujet n'est pas réductible à un choix entre des états de la réalité plus ou moins proches du but.

<u>3ème exemple</u> : <u>La solution de problèmes arithmétiques</u>
On est cette fois dans la catégorie des problèmes abstraits parce que les éléments que transforme et compose le sujet ne sont plus des objets de la réalité mais des informations abstraites. Certes ces informations ont un support matériel, la parole ou la feuille de papier couverte de signes, et ce n'est pas complètement dépourvu de sens de parler des transformations que le sujet fait subir à cette réalité qui sont par exemple des équations écrites sur une feuille de papier. Mais pour l'essentiel, et en particulier dans la solution de problèmes

arithmétiques chez l'enfant, on peut dire que l'enfant transforme et compose des informations.

Comment s'appliquent alors les notions de règle de production et de représentations calculables ?

Si l'on regarde des activités comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division en numération de position, il est relativement aisé d'écrire les règles que suit le sujet ainsi que les relations qui existent entre ces règles et le système de numération de position, lui-même relié aux opérations de groupement des objets.

Les choses se compliquent un peu avec la solution de problèmes arithmétiques proprement dits car ces problèmes n'impliquent guère en général de réitération de la même règle mais chaque transformations ou composition des informations traduit une certaine représentation des relations en jeu. La suite des opérations du sujet doit donc être rapportée aux relations en jeu et le problème fondamental est donc celui de la représentation de ces relations.

1er exemple : Problèmes additifs

Deux schémas sont valables pour représenter une addition (ou une soustraction)

a - la loi de composition binaire $a + b = c$

b - le schéma état-trans.ormation-état $a \xrightarrow{+b} c$

Sans nier la fécondité du premier schéma pour certains problèmes, il faut souligner que le second schéma se prête bien à rendre compte de la plupart des problèmes de type additif (additions et soustractions) parce que le déroulement temporel permet le plus souvent de désigner ce qui est état et ce qui est transformation.

On peut établir une classification simple d type de problèmes qu'on peut poser. Par exemple

1) avec une seule transformation

$$\boxed{EI} \xrightarrow{T} \boxed{EF}$$

rechercher l'état final EF

l'état initial EI

la transformation T

2) avec deux transformations et leur composée

$$\begin{tikzcd} \boxed{EI} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_3"'] & \boxed{Ei} \arrow[r, "T_2"] & \boxed{EF} \end{tikzcd}$$

A - On peut comparer deux types de recherches

	final	EF
rechercher un <u>état</u>	initial	EI
	intermédiaire	Ei

rechercher une <u>transformation</u>

élémentaire $\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases}$

composée T_3

B - La <u>structure de l'information</u> étant variable, on peut comparer les difficultés correspondant aux différentes structures de cette information :

- deux transformations et un état T_1 T_2 EI

T_1 T_2 Ei

T_1 T_2 EF

T_1 T_3 EI

T_1 T_3 Ei

T_1 T_3 EF

etc...

- une transformation et deux états	T_1	EI	EF
	"	Ei	EF
	T_2	EI	EF
	"	EI	Ei
	T_3	EI	Ei
	"	Ei	EF
- deux transformations seulement (ce qui exclut toute question sur les états)	T_1	T_2	
	T_1	T_3	
	T_2	T_3	

C - Il faut ajouter à cela que la <u>valeur relative,</u> en signe et en valeur absolue, des transformations permet d'établir un autre type de complexité. Par exemple un problème du type suivant :

trouver T_2 connaissant T_1 et T_3

ne présente pas la même difficulté pour les valeurs suivantes de T_1 et T_3

$T_1 = + 4$ $\quad$ $T_3 = + 6$

$T_1 = + 4$ $\quad$ $T_3 = - 6$

$T_1 = + 6$ $\quad$ $T_3 = + 4$

$T_1 = - 6$ $\quad$ $T_3 = + 4$

etc...

D - Enfin a) le <u>contenu</u> utilisé pour le problème peut faire varier assez sensiblement la difficulté. (Ce contenu peut être un autobus qui se vide et se remplit de voyageurs, un enfant qui gagne et perd des billes, une femme qui gagne et dépense de l'argent etc...).

b) il en est de même pour <u>l'ordre</u> et la <u>forme syntaxique</u> dans lesquels sont présentées les informations (ordre du déroulement temporel, ou ordre inverse, ou ordre différent ; propositions indépendantes ou subordonnées temps du verbe etc...).

Un groupe d'étudiantes travaillant sous la direction de Pierre GRECO et de moi-même a étudié systématiquement des problèmes du type : <u>connaissant l'état final et deux transformations (variant en signe et en valeur absolue) trouver l'état initial.</u>

Elles ont trouvé :

1°) qu'il existe une très forte hiérarchie de la réussite des différents types de problèmes proposés :

- . 2 transformations positives
- . 2 transformations négatives
- . 2 transformations de signe contraire
  - . avec composée positive
  - . avec composée négative

2°) que les procédures d'attaque du problème, et qui conduisent à la réussite ou à l'échec, connaissent une évolution nette entre 7 et 11 ans. En particulier on constate le caractère tardif des procédures qui consistent

. à inverser les transformations pour les appliquer à l'état final

. à composer deux transformations et à appliquer la composée.

Mais l'analyse des procédures permet beaucoup d'autres remarques.

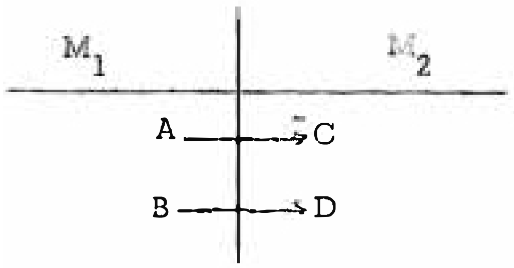
<u>2ème exemple Problèmes multiplicatifs et les isomorphismes d'espace de mesure</u>

Il est tentant de croire que les problèmes comportant des multiplications et des divisions puissent être schématisés par un schéma analogue au schéma additif exposé plus haut : la règle de trois en particulier peut se réduire facilement à un tel schéma.

Mais cela n'est pas possible en fait, pour la raison fondamentale que les transformations additives portent en général sur un seul espace de mesure, tandis que les opérateurs multiplicatifs mettent en jeu au moins deux espaces de mesure et l'application isomorphe de l'un dans l'autre.

La première étude à aborder est par conséquent celle de la difficulté relative du calcul des quatre termes impliqués dans la relation quaternaire.

A est à B ce que C est à D



En fait il faut d'abord considérer les cas dans lesquels un terme est égal à 1, car c'est le cas de nombreux problèmes (lorsqu'est en cause le prix unitaire, ou le poids unitaire, ou la capacité unitaire etc...).

Supposons que A soit égal à 1 et que B soit un entier, il y a alors 3 types de problèmes :

. trouver D connaissant B et C
. trouver C connaissant B et D
. trouver B connaissant C et D

La solution des problèmes du premier type implique une multiplication. Celle des problèmes des deux derniers types implique une division mais elle n'a pas le même caractère dans les deux cas puisque le diviseur appartient selon le cas au même espace de mesure que le dividende ou à un espace différent.

Lorsqu'aucun des termes n'est égal à 1, il faut en général composer une multiplication et une division pour résoudre le problème et il est facile de dresser la liste des cas possibles. Je ne le ferai pas et j'insisterai seulement sur l'intérêt qu'il y a à dresser de telles classifications pour étudier expérimentalement le développement de l'arithmétique chez l'enfant.

Très souvent, les énoncés de problèmes impliquent plus de deux espaces de mesure et cela amène des difficultés supplémentaires, qu'il est nécessaire d'analyser de la même façon pour mener l'expérimentation.