Structures addictives et complexité psychogénétique

In Revue française de pédagogie
Durand Catherine, Vergnaud Gérard
1976, volume 36, pp.28-43

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/Gvergnaud_1976_Structures-Additives_Revue-Francaise-Pedagogie

REVUE FRANÇAISE DE PÉDAGOGIE

N° 36 - JUILLET - AOUT - SEPTEMBRE 1976

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES

STRUCTURES ADDITIVES ET COMPLEXITE PSYCHOGENETIQUE

La solution des problèmes d'arithmétique élémentaire n'a pas été beaucoup étudiée par les psychologues. C'est pourtant une étude intéressante ; non seulement à cause de ses applications possibles, mais aussi parce qu'elle permet d'illustrer certaines questions théoriques générales de la solution de problème.

LOI DE COMPOSITION INTERNE ET TRANSFORMATION

La présentation classique des opérations arithmétiques élémentaires est fondée sur la notion de loi de composition interne binaire

$$a + b = c$$
$$a - b = c$$
$$a \times b = c$$
$$a : b = c$$

Dans toutes ces équations, c est considéré comme un nombre de même nature que a et b et comme le résultat de leur composition.

Cette conception mathématique, développée surtout pour l'addition et la multiplication, ne permet pas de traiter aussi simplement la soustraction et la division. En effet, si l'on prend par exemple comme ensemble de référence l'ensemble des nombres naturels (nombres entiers positifs), la soustraction de deux nombres naturels a et b ne donne un nombre naturel que si a est plus grand que b ou égal à b ; et la division de a par b ne donne un nombre naturel que si a est un multiple de b ; il s'en suit que la soustraction et la division ne sont pas des lois internes pour l'ensemble des naturels.

L'étude des problèmes d'arithmétique élémentaire met en évidence beaucoup d'autres difficultés, qui montrent l'insuffisance, sinon l'inaéquation, de la notion de loi interne pour caractériser certaines relations numériques.

Nous nous contenterons dans cet article d'étudier les problèmes de type additif, en désignant ainsi les problèmes dont la solution n'implique que des additions ou des soustractions. Nous voulons donner cependant un exemple de problème de type multiplicatif qui montre que les questions soulevées ici sont des questions générales. Cet exemple met en évidence que certaines relations multiplicatives ne portent pas sur trois éléments a, b et c comme on pourrait le croire mais font intervenir en fait quatre quantités ; il montre également que les nombres en relation ont un statut profondément différent.

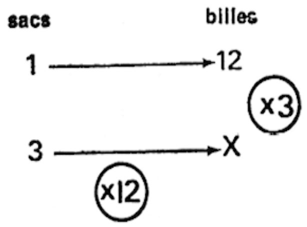
Soit le problème suivant :

« J'ai 3 sacs de 12 billes chacun. Combien ai-je de billes en tout ? »

Traduisons par un schéma sagittal les relations qui sont contenues dans l'énoncé, en désignant par x la quantité de billes recherchée.

« 12 billes chacun »	1 sac → 12 billes
« J'ai 3 sacs. Combien ai-je de billes en tout »	3 sacs → x billes

On voit clairement qu'il y a quatre quantités et non pas trois. Ecrivons dans un tableau ces quatre quantités et les deux solutions possibles du problème :



Le statut des différents nombres du tableau est très différent :

— 1, 3 représentent des vecteurs du premier espace (sacs)

— 12, x représentent des vecteurs du second espaces (billes)

— x3 représente un scalaire

— x 12 représente une fonction du premier espace dans le second.

Les deux solutions possibles :

- Multiplier le vecteur **12 billes** par le scalaire **x3**
- Multiplier le vecteur **3 sacs** par la fonction **x12 billes/sacs**

font intervenir des notions différentes qu'on ne peut pas considérer comme identiques.

Mais revenons aux problèmes de type additif.

Les réflexions qui suivent sont fondées principalement sur le fait que de nombreux problèmes de type additif font intervenir un déroulement temporel et que les différents nombres en jeu ne sauraient être mis sur le même plan : certains représentent des états, d'autres représentent des transformations.

Par exemple :

« J'ai 3 francs en poche, ma mère me donne 2 francs.

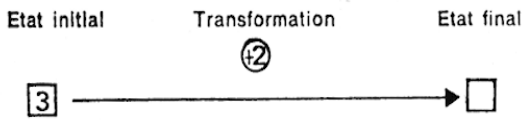
Combien ai-je en tout ? »

— 3 représente l'état de mes ressources financières, c'est une mesure (nécessairement positive ou nulle) de ces ressources.

— 2 représente une transformation de ces ressources. Ici une transformation positive... mais il aurait pu s'agir d'une transformation négative (dépense ou perte).

Il est important de respecter cette différence de statut dans l'analyse des relations numériques, différence qui se traduit notamment par le fait que les états sont le plus souvent des mesures, donc des nombres positifs (des naturels si on s'en tient aux nombres entiers) tandis que les transformations sont des nombres positifs ou négatifs (des relatifs si on s'en tient aux entiers).

Nous utiliserons la représentation suivante :



La flèche indique le sens de la transformation d'un état à l'autre, le cercle marque les nombres relatifs, le rectangle marque les nombres naturels.

LES CINQ GRANDES CATEGORIES DE RELATIONS NUMERIQUES ADDITIVES

Pour général qu'il soit, le schéma qui précède ne rend pas compte de toutes les situations possibles.

Il peut arriver qu'il n'y ait aucun déroulement temporel et que l'opération de composition porte exclusivement sur des états.

Exemple : « Il y a 4 garçons et 3 filles autour de la table. Combien y a-t-il d'enfants en tout ? »

Il peut arriver que les états soient eux-mêmes des relations et doivent être représentés par des nombres relatifs.

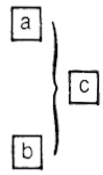
Exemple : « J'ai un crédit de 300 francs à ma banque. Je tire un chèque de 400 francs. Quelle est la situation de mon compte ? »

Il peut arriver que l'opération de composition porte directement sur des transformations.

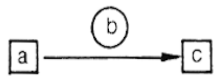
Exemple : « J'ai gagné 10 billes hier et j'en ai perdu 16 aujourd'hui. Combien en ai-je gagné ou perdu en tout ?

Nous distinguerons cinq grandes catégories de relations :

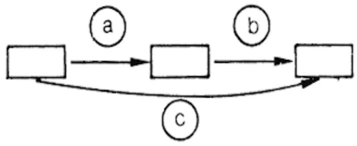
I. Deux mesures se composent en une troisième :



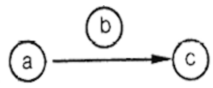
II. Une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure :



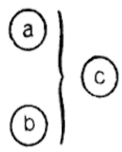
III. Deux transformations se composent en une troisième :



IV. Une transformation opère sur un état relatif pour donner un état relatif :

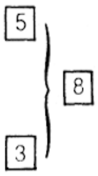


V. Deux états relatifs se composent en un troisième :



Nous allons donner cinq exemples qui illustrent bien ces distinctions. Pour simplifier, nous nous en tiendrons à des nombres entiers, et à un seul contenu, le jeu de billes.

I. J'ai 5 billes en verre, 3 billes en acier, 8 billes en tout.

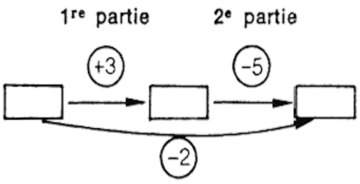


5, 3 et 8 sont des nombres naturels.

II. J'avais 7 billes. Je joue une partie et je perds 3 billes. J'en ai maintenant 4.

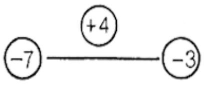
7 et 4 sont des nombres naturels, —3 est un nombre relatif.

III. Je joue une partie et je gagne 3 billes. Je joue une seconde partie et j'en perds 5. En tout j'ai perdu 2 billes.



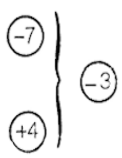
+3, —5 et —2 sont des nombres relatifs.

IV. Je dois 7 billes à Paul. Je lui en rends 4. Je ne lui en dois plus que 3.



—7, +4 et —3 sont des nombres relatifs.

V. Je dois 7 billes à Paul, il m'en doit 4. Par conséquent je lui en dois 3.



—7, +4 et —3 sont des nombres relatifs.

A partir de cette analyse il est facile de montrer la diversité des problèmes d'arithmétique élémentaire qu'on peut poser.

Nous ne pouvons pas le faire exhaustivement dans le cadre de cet article et nous n'avons d'ailleurs recueilli de données expérimentales que sur quelques classes de problèmes. Aussi bien cet article ne vise-t-il pas à traiter complètement la solution des problèmes de type additif mais seulement à en étudier quelques aspects fondamentaux et à fournir un cadre théorique aux multiples expériences possibles.

RELATIONS NUMERIQUES ET CALCUL RELATIONNEL

Comme nous n'étudierons pas ici toutes les classes de problèmes possibles nous n'aborderons pas non plus tous les calculs relationnels qui sont mis en œuvre dans l'arithmétique élémentaire.

● Il est facile de voir cependant que la première catégorie de relations numériques distinguée plus haut donne lieu à deux classes de problèmes :

— connaissant les deux mesures élémentaires, trouver leur composée ;

— connaissant la mesure composée et une mesure élémentaire, trouver l'autre ;

chacune de ces classes de problèmes se subdivise en sous-classes d'inégale difficulté selon la grandeur des nombres en jeu, selon leur valeur relative, selon qu'ils sont entiers ou décimaux, selon le contenu des énoncés, etc...

● La seconde catégorie de relations numériques donne lieu à six grandes classes de problèmes (trois classes qui se subdivisent chacune en deux selon que la transformation est positive ou négative) :

• connaissant l'état initial et la transformation, trouver l'état final ;

• connaissant l'état initial et l'état final, trouver la transformation ;

• connaissant l'état final et la transformation, trouver l'état initial.

Là encore chacune de ces six classes se subdivise en sous-classes d'inégale difficulté selon la grandeur absolue et relative des nombres en jeu, selon qu'ils sont entiers ou décimaux, selon le contenu des énoncés, selon l'ordre, la redondance, la forme syntaxique des informations données...

● La troisième catégorie de relations numériques donne lieu à deux grandes classes de problèmes :

• connaissant les deux transformations élémentaires, trouver leur composée ;

• connaissant la transformation composée et l'une des transformations élémentaires, trouver l'autre.

Mais la grandeur relative des nombres en jeu intervient ici de façon plus décisive que dans les cas précédents du fait qu'ils peuvent être positifs ou négatifs. C'est ainsi que la classe de problèmes se subdivise en plusieurs sous-classes, de nature assez différente quant au calcul relationnel qu'implique leur solution :

- deux transformations élémentaires positives ;
- deux transformations élémentaires négatives ;
- deux transformations élémentaires de signe différent dont la composée est positive ;
- deux transformations élémentaires de signe différent dont la composée est négative.

Quant à la seconde classe de problèmes (connaissant la transformation composée et l'une des transformations élémentaires, trouver l'autre) elle se subdivise également en plusieurs sous-classes, que nous verrons plus loin à l'occasion de l'exposé du plan expérimental que nous avons suivi.

Là encore il faudrait faire intervenir d'autres subdivisions selon le caractère des nombres, le contenu des énoncés, la forme et l'ordre des informations...

Nous nous arrêterons là et ne poursuivrons pas l'analyse ; nous laisseons délibérément de côté les deux dernières catégories de relations numériques. Il est clair cependant, à ce point de l'exposé, que la solution de ces différentes classes de problèmes n'implique pas les mêmes opérations. On ne saurait en effet mettre sur le même plan, la composition de deux états, l'application d'une transformation directe à un état, la composition de deux transformations, l'application d'une transformation inverse à un état, la recherche de la différence de deux états, etc... etc...

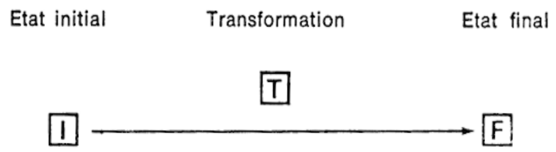
En d'autres termes, la solution de ces différentes classes de problèmes n'implique pas les mêmes **calculs relationnels.** L'expérience qui est rapportée ici a pour but de montrer quelques différences parmi les plus importantes.

PLAN EXPERIMENTAL

Notre but étant, dans un premier temps, de faire apparaître les différences entre la seconde et la troisième catégorie de relations numériques, c'est-à-dire entre le schéma état-transformation-état et le schéma transformation-transformation-transformation, nous avons choisi des problèmes exclusivement dans ces deux catégories. Encore nous sommes-nous limités à un petit nombre d'entre eux.

Nous avons également porté notre attention sur une variété de problèmes qui nous semblaient particulièrement difficiles pour les enfants de l'école élémentaire, ceux qui consistent à rechercher une transformation élémentaire connaissant l'autre et leur composée.

Schéma ETE (Etat-transformation-état)



Sur les six grandes classes de problèmes possibles, rappelées dans le tableau ci-dessous, nous n'en avons retenues que trois ; les problèmes correspondants sont désignés par les prénoms (de garçons) que nous avons utilisés dans les énoncés.

La question porte sur

	F	T	I
T>0		Claude	
T<0	Pierre		Bertrand

Pierre a 6 billes

Il joue une partie et il **perd 4 billes**

— Combien de billes a-t-il après la partie ?

Bertrand joue une partie de billes

Il perd 7 billes

Après la partie, il **a 3 billes**

— Combien de billes avait-il avant la partie ?

Claude a 5 billes

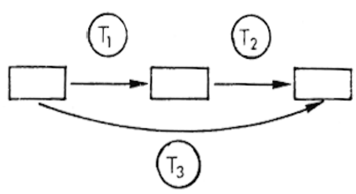
Il joue une partie

Après la partie, il **a 9 billes**

— Que s'est-il passé au cours de la partie ?

Schéma TTT (Transformation-transformation-transformation)

Etat initial 1re transf. Etat interm. 2e transf. Etat final



1er cas. Trouver T3 connaissant T1 et T2.

Sur les six grandes classes de problèmes possibles, rappelées dans le tableau ci-dessous, nous n'en avons retenues que deux, celles correspondant à Paul et Laurent ; la troisième, désignée par Michel, n'a été utilisée que dans quelques groupes d'enfants.

		$T_2 > 0$	$T_2 < 0$	
$T_1 > 0$			Paul	$\lvert T_1 \rvert > \lvert T_2 \rvert$
			Michel	$\lvert T_1 \rvert < \lvert T_2 \rvert$
$T_1 < 0$	$\lvert T_1 \rvert < \lvert T_2 \rvert$		Laurent	
	$\lvert T_1 \rvert > \lvert T_2 \rvert$			

Paul joue deux parties de billes.

A la première partie, il **gagne 6 billes**

A la deuxième partie, il **perd 4 billes**

— Que s'est-il passé en tout ?

Laurent joue deux parties de billes.

A la première partie, il **perd 2 billes**

A la deuxième partie, il **perd 5 billes**

— Que s'est-il passé en tout ?

Michel joue deux parties de billes.

A la première partie, il **gagne 4 billes**

A la deuxième partie, il **perd 6 billes**

— Que s'est-il passé en tout ?

2e cas. Trouver T2 connaissant T1 et T3.

Nous avons distingué, huit grandes classes de problèmes possibles, selon le signe de T1 et de T3 (4 possibilités) et selon la grandeur relative, en valeur absolue, de T1 et T3 (2 possibilités), soit au total 4 × 2 = 8 possibilités. En effet, les relations numériques en jeu sont différentes si les deux transformations T1 et T3 sont toutes deux positives, toutes deux négatives ou de signe différent. Et elles sont également différentes lorsque T1 est plus petit ou plus grand que T3 en valeur absolue. D'où le tableau suivant dont nous avons retenu 5 cas.

	$T_1 > 0$, $T_3 > 0$	$T_1 < 0$, $T_3 < 0$	$T_1 > 0$, $T_3 < 0$	$T_1 < 0$, $T_3 > 0$
$\lvert T_3 \rvert > \lvert T_1 \rvert$	Christian	Jacques	Olivier	
$\lvert T_3 \rvert < \lvert T_1 \rvert$		Didier	Vincent	

Christian joue deux parties de billes.

A la première partie il **gagne 5 billes.**

Il joue une deuxième partie.

Après ces deux parties, il a gagné en tout **9 billes.**

— Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

Jacques joue deux parties de billes.

A la première partie, il **perd 5 billes.**

Il joue une deuxième partie.

Après ces deux parties, il a perdu en tout **8 billes.**

— Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

Didier joue deux parties de billes.

A la première partie, il **perd 7 billes.**

Il joue une deuxième partie.

Après ces deux parties, il a perdu en tout **4 billes.**

— Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

Olivier joue deux parties de billes.

A la première partie il **gagne 2 billes.**

Il joue une deuxième partie.

Après ces deux parties, il a perdu en tout **7 billes.**

— Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

Vincent joue deux parties de billes.

A la première partie, il **gagne 8 billes.**

Il joue une deuxième partie.

Après ces deux parties, il a perdu en tout **2 billes.**

— Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

3e cas. Trouver T1 connaissant T2 et T3

Nous n'avons retenu qu'un seul cas parmi les huit possibles :

$$T_2 < 0, \; T_3 > 0, \; \lvert T_2 \rvert > \lvert T_3 \rvert$$

Bruno joue deux parties de billes.

Il joue une première partie puis une deuxième.

A la deuxième partie, il **perd 7 billes.**

Après ces deux parties il a gagné en tout **3 billes**

— Que s'est-il passé à la première partie ?

D'autres classes de problèmes auraient pu être choisies que celles qui ont été retenues ici, d'autres nombres (notamment des grands nombres), d'autres contenus, d'autres formes d'énoncés. C'est ce qui devrait être fait dans une étude complète de la solution des problèmes de type additif. Nous n'avons retenu qu'un seul contenu, celui du jeu de billes, et nous avons standardisé au maximum les énoncés, de façon à rendre aussi peu contestable que possible la comparaison des résultats. Nous n'avons utilisé que des petits nombres afin de poser dans toute son ampleur la question du calcul relationnel, sans interférence avec d'autres aspects de la solution de problème (calcul numérique, calcul mental...).

Le choix des différents problèmes retenus n'est pas également motivé. On remarquera cependant que six problèmes sur les onze présentés permettent de faire une comparaison systématique entre le schéma ETE et le schéma TTT. Ce sont les problèmes suivants :

ETE	TTT
Pierre	**Paul**
Bertrand	**Bruno**
Claude	**Christian**

Sujets

140 enfants ont passé l'expérience, 28 par niveau scolaire (il existe en France, cinq niveaux scolaires dans l'enseignement du premier degré qui accueille les enfants de 6 à 11-12 ans). Ce sont le cours préparatoire (CP), le cours élémentaire première et deuxième année (CE1 et CE2), le cours moyen première et deuxième année (CM1 et CM2).

La moitié des enfants qui ont passé l'expérience était formée d'élèves d'une école expérimentale mixte, dans laquelle est donné un enseignement rénové de mathématiques, l'autre moitié était formée d'élèves de deux écoles communales ordinaires non mixtes. Chaque groupe d'enfants comprend autant de filles que de garçons. Pour chaque niveau scolaire, le groupe de 28 enfants se répartit donc de la façon suivante :

	Garçons	Filles
EAB (Ecole expérimentale)	7	7
COM (Ecole communale ordinaire)	7	7

Modalités de passation :

Les énoncés étaient présentés sur une petite fiche de carton, écrits en gros et à la main, à l'encre bleue. Les informations importantes étaient écrites à l'encre rouge (elles sont en gras dans le texte de cet article). L'expérimentateur lisait l'énoncé à voix haute et laissait le carton sous les yeux de l'enfant. L'épreuve était donc entièrement verbale et l'enfant pouvait seulement compter sur ses doigts ou se donner une représentation imagée du problème : certains enfants ont d'ailleurs décrit cette représentation (« je fais des petits points, j'en barre 4 et j'en vois 2 »). Les enfants ne disposaient notamment d'aucun schéma sagittal analogue à celui que nous utilisons dans cet article et qui est utilisé dans l'enseignement rénové des mathématiques à l'école expérimentale. L'ordre de passation des problèmes était tiré au sort, l'enfant tirant lui-même d'une urne les papiers sur lesquels figuraient les prénoms correspondants aux différents problèmes. Une variation systématique de l'ordre des items nous aurait conduit à un plan expérimental trop lourd. Nous avons cependant noté l'ordre de passation pour chaque sujet et nous nous y sommes référés pour l'explication de certaines réponses (écarts à la hiérarchie).

Les réponses fausses n'étaient pas corrigées par l'expérimentateur, qui se contentait de relire l'énoncé ou la question. On demandait à l'enfant comment il avait trouvé la réponse.

L'expérience a été menée d'abord avec les enfants du plus haut niveau scolaire (CM2), puis avec ceux du niveau immédiatement inférieur, en descendant ainsi jusqu'au groupe le plus jeune. Cela a permis d'abandonner en cours de route les problèmes trop difficiles et d'alléger ainsi l'épreuve pour les plus petits.

RESULTATS

Le Tableau 1 donne les résultats détaillés par problème et par groupe d'enfant. On peut lire dans chaque case le nombre de réussites obtenu dans chaque groupe, le nombre maximum possible étant 7 (effectif de chaque groupe d'enfant).

On a effectué des totalisations partielles par niveau scolaire (chiffres gras).

Toutefois plusieurs problèmes n'ont pas été posés aux enfants les plus jeunes, à cause de leur difficulté trop grande (**Didier, Olivier, Vincent**). Quant au problème « **Michel** » il n'a été présenté qu'à certains enfants de CM2 qui, par contre, n'ont pas eu à résoudre le problème « **Laurent** ». Les résultats globaux des cinq dernières lignes, qui figurent dans la dernière colonne à droite, ne doivent donc pas être rapportés à l'effectif total de sujets (140) mais seulement à un nombre inférieur à 140 qui est d'ailleurs indiqué.

Comparaison du schéma ETE et du schéma TTT

Six problèmes permettent de faire cette comparaison.

La comparaison des réussites au problème Pierre et au problème Paul permet en effet de voir la difficulté relative de la recherche de l'état final et de la recherche d'une transformation composée alors que l'opération à effectuer est la même dans les deux cas.

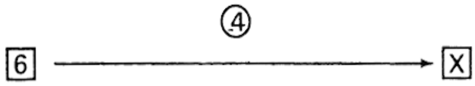
TABLEAU I

Nombre de réussites par problème et par groupe d'enfant
(détail selon sexe, école, niveau scolaire)

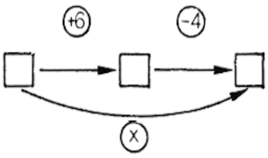
	CP				Total	CE1				Total	CE2				Total	CM1				Total	CM2				Total	
	F		G			F		G			F		G			F		G			F		G			
	EAB	COM	EAB	COM		EAB	COM	EAB	COM		EAB	COM	EAB	COM		EAB	COM	EAB	COM		EAB	COM	EAB	COM		
Pierre	3	2	3	6	**14**	6	4	7	7	**24**	7	6	7	7	**27**	7	6	7	7	**27**	7	7	7	6	**27**	119
Paul	2	1	1	4	**8**	2	3	6	3	**14**	7	4	7	6	**24**	6	5	4	6	**21**	5	4	7	7	**23**	90
Bertrand	0	1	1	2	**4**	3	3	5	4	**15**	6	7	7	7	**27**	6	6	6	7	**25**	6	7	6	7	**26**	97
Bruno	0	1	0	0	**1**	0	0	1	1	**2**	2	0	1	4	**7**	1	2	3	2	**8**	5	0	3	5	**13**	31
Claude	1	1	2	1	**5**	2	3	5	6	**16**	6	5	6	7	**24**	7	7	7	7	**28**	7	5	7	7	**26**	99
Christian	0	1	1	0	**2**	2	2	5	4	**13**	7	3	5	6	**21**	7	6	7	7	**27**	7	7	7	7	**28**	91
Jacques	0	1	1	0	**2**	2	1	4	4	**11**	4	2	5	6	**17**	6	5	7	5	**23**	7	5	6	6	**24**	77
Didier						0	1	1	1	**3**	3	2	4	3	**12**	6	2	4	4	**16**	7	6	6	5	**24**	55/112
Olivier																1	1	2	2	**6**	0	0	4	2	**6**	12/56
Vincent																0	0	2	0	**2**	2	1	2	3	**8**	10/56
Laurent	1	1	0	0	**2**	1	5	3	2	**11**	4	3	5	7	**19**	7	5	7	6	**25**			2/3	5	**7/10**	64/122
Michel																					5	6	2/4		**13/18**	13/18
Effectif de référence	7	7	7	7	**28**	7	7	7	7	**28**	7	7	7	7	**28**	7	7	7	7	**28**	7	7	7	7	**28**	140

C.P. : cours préparatoire - CE_1, CE_2 : cours élémentaire (1re et 2e année), CM_1, CM_2 : cours moyen (1re et 2e année).
EAB : Ecole Active Bilingue (expérimentale) - COM : Ecole communale ordinaire.

Pierre

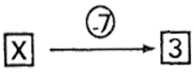


Paul

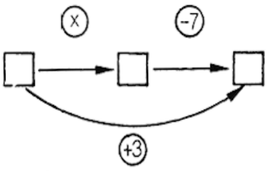


De même la comparaison des réussites au problème Bertrand et au problème Bruno permet de voir la difficulté relative de la recherche de l'état initial et de la recherche de la première transformation élémentaire.

Bertrand

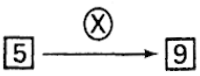


Bruno

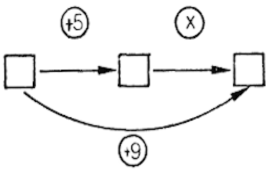


Enfin la comparaison des réussites au problème Claude et au problème Christian permet de voir la difficulté relative de la recherche de la transformation dans le schéma ETE et de la recherche de la deuxième transformation élémentaire dans le schéma TTT.

Claude



Christian

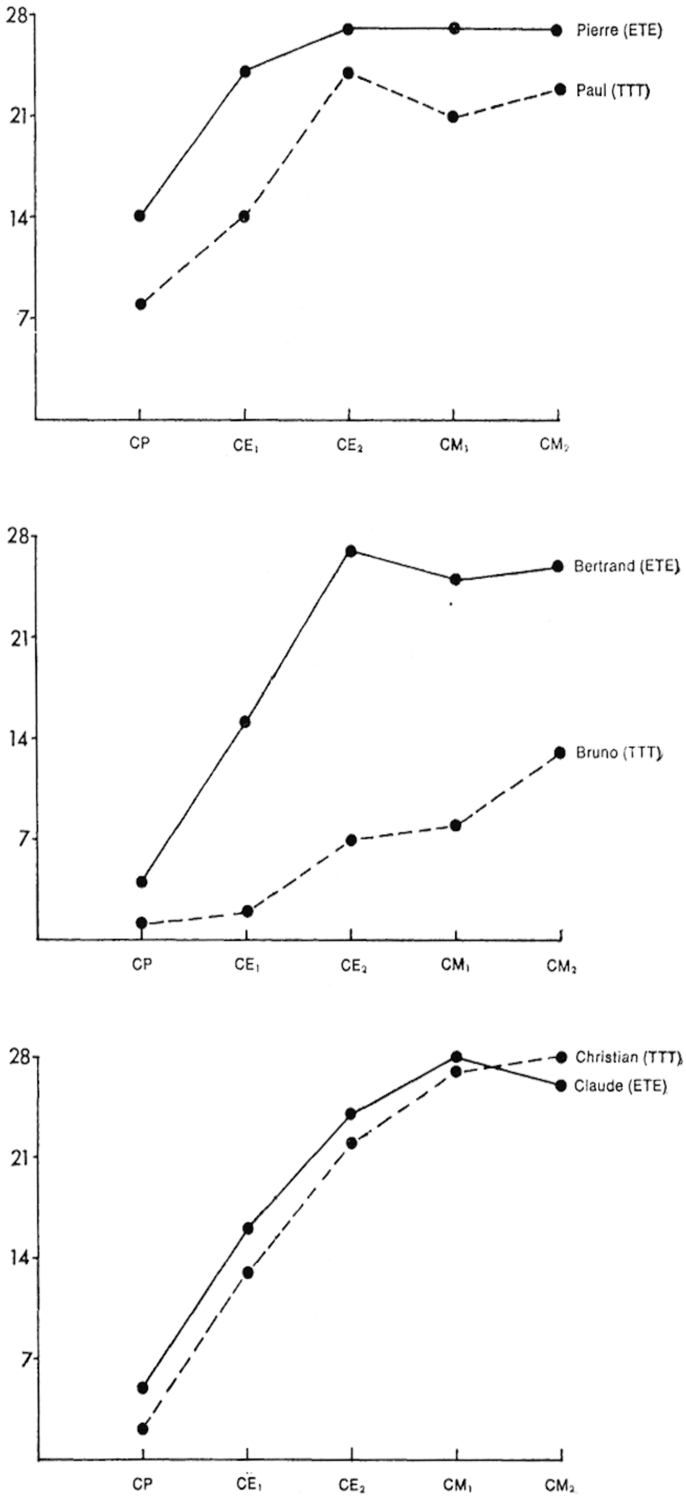


Le tableau II résume sous forme graphique les résultats obtenus. Il fait bien apparaître la difficulté plus grande des problèmes TTT par rapport aux problèmes ETE correspondants.

On peut même avoir une évaluation grossière du décalage entre la réussite à deux problèmes homologues du schéma ETE et du schéma TTT, en considérant pour chaque problème le niveau où se situe le nombre avoisinant 50 % de réussites. Dans le tableau en haut de la page suivante, ce nombre figure en caractère gras.

Tableau II

Comparaison des problèmes ETE et TTT



On constate de la sorte :

- Un décalage d'une année entre les problèmes Pierre (ETE) et Paul (TTT)
- Un décalage de trois années entre les problèmes Bertrand (ETE) et Bruno (TTT)
- Un très léger décalage, presque négligeable, entre les problèmes Claude (ETE) et Christian (TTT)

Nombre de réussites

	CP	CE_1	CE_2	CM_1	CM_2
Pierre	**14**	24	27	27	27
Paul	8	**14**	24	21	23
Bertrand	4	**15**	27	25	26
Bruno	1	2	7	8	**13**
Claude	5	**16**	24	28	26
Christian	2	**13**	21	27	28

Les calculs relationnels relatifs à la composition de transformations sont donc plus difficiles que ceux relatifs à l'application d'une transformation sur un état. Toutefois les différences sont loin d'être homogènes et peuvent entraîner un décalage impressionnant (Bertrand-Bruno) comme un décalage négligeable (Claude-Christian).

On verra dans la conclusion que les calculs relationnels nécessaires à la solution des différents problèmes TTT ne sont pas une simple « translation » des calculs relationnels valables pour les problèmes ETE : en particulier, si la même procédure s'applique presqu'aussi bien à la recherche de T2 dans le cas TTT qu'à la recherche de la transformation dans le cas ETE, les procédures de recherche de T_1 dans le cas TTT et de l'état initial dans le cas ETE sont assez différentes.

Pour confirmer cette analyse des résultats bruts, nous avons établi les tableaux croisés des réussites (R) et des échecs (E) à deux problèmes homologues du schéma ETE et du schéma TTT. Ces tableaux croisés confirment, sans qu'il soit besoin d'un test statistique la difficulté plus grande des relations TTT.

		Paul R	Paul E	
Pierre	R	89	30	119
	E	1	20	21
		90	50	140

		Bruno R	Bruno E	
Bertrand	R	31	66	97
	E	0	43	43
		31	109	140

		Christian R	Christian E	
Claude	R	86	13	99
	E	5	36	41
		96	49	140

On ne rencontre en effet pratiquement pas de sujets qui réussissent au problème TTT et qui échouent au problème ETE correspondant, sauf toutefois pour les problèmes Claude et Christian dont nous avons déjà constaté la moindre différence.

Comparaison des problèmes ETE entre eux

L'expérience n'a pas été organisée pour faire cette comparaison de façon systématique. En effet, un seul problème fait intervenir une transformation positive (Claude) et deux font intervenir une transformation négative (Pierre et Bertrand).

Des résultats obtenus par ailleurs montrent que, pour une même transformation, la recherche de l'état final est plus facile, celle de l'état initial plus difficile, la recherche de la transformation étant d'une difficulté intermédiaire.

Les résultats obtenus dans cette expérience vont dans ce sens, ainsi qu'on peut le constater dans le tableau III ci-dessous.

Tableau III

Nombre de réussites obtenues aux différents problèmes ETE

	La question porte sur : L'état final	La transformation	L'état initial
$T > 0$		Claude **99** 5-16-24-28-26	
$T < 0$	Pierre **119** 14-24-27-27-27		Bertrand **97** 4-15-27-25-26

- Sur la première ligne, le nombre total de réussites.
- Sur la seconde ligne, les cinq nombres correspondant aux cinq niveaux scolaires, du CP au CM_2. Le nombre avoisinant 50 % de réussites sont en caractères gras.

On constate en effet un décalage d'une année entre la réussite au problème Pierre (recherche de l'état final) et la réussite aux deux autres problèmes. Mais la comparaison entre ces deux derniers problèmes, perd un peu de sa signification du fait que le problème Claude fait intervenir une transformation positive et le problème Bertrand une transformation négative.

Si on s'en tient aux deux problèmes Pierre et Bertrand qui font tous les deux intervenir une transformation négative, on peut établir le tableau croisé des réussites (R) et des échecs (E), qui confirme la plus grande difficulté de la recherche de l'état initial par rapport à la recherche de l'état final.

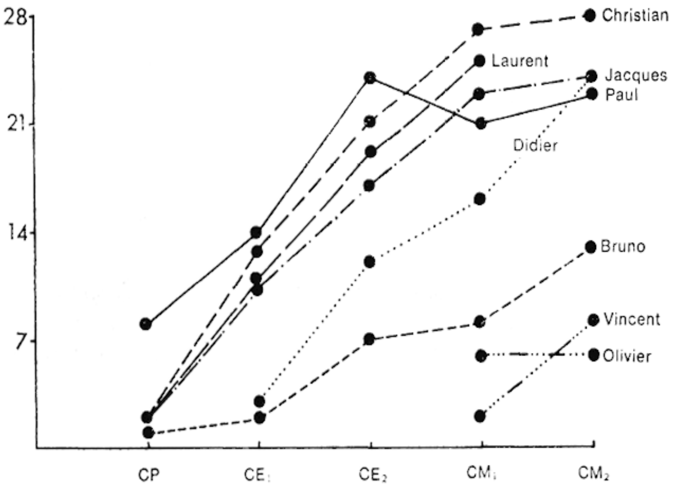
		Bertrand R	Bertrand E	
Pierre	R	90	29	119
	E	7	14	21
		97	43	140

Comparaison des problèmes TTT entre eux

Les résultats qu'on trouve présentés sous forme graphique dans le tableau IV et sous forme numérique dans le tableau V, permettent de constater qu'il existe une réelle hiérarchie de difficulté entre les différents problèmes selon le signe et la valeur absolue des transformations en jeu (cf. Tableaux IV et V).

Tableau IV

Comparaison des problèmes TTT entre eux



En ordonnée, le nombre de réussites obtenues à chaque niveau scolaire.

Dans la recherche de T3, nous n'avons retenu que les deux problèmes Paul et Laurent, le troisième problème Michel n'ayant pas été soumis à un nombre suffisant de sujets. La différence entre les deux problèmes est faible et il semble que la difficulté de la composition de deux transformations négatives ne soit guère plus grande que celle de la composition d'une transformation positive et d'une transformation négative plus petite en valeur absolue. Il faut remarquer surtout que ces deux problèmes sont à peu près au même niveau que le problème Christian, qui est le plus simple des problèmes consistant à rechercher T2 et dans lequel les transformations sont toutes positives, T3 étant plus grand que T1 en valeur absolue.

Tableau V

Nombre de réussites obtenues aux différents problèmes TTT

- Sur la première ligne, le nombre total de réussites (rapporté à 140 lorsqu'aucune autre indication n'existe).
- Au-dessous, les cinq nombres correspondant aux cinq niveaux scolaires du CP au CM_2. Les nombres avoisinant 50 % de réussites sont en caractères gras.

Recherche de T_3

	$T_2 > 0$	$T_2 < 0$	
$T_1 > 0$		Paul **90** 2-**14-24-21-23**	$\|T_1\|>\|T_2\|$
$T_1 < 0$		Laurent **64**/122 2-11-19-25-7/10	

Recherche de T_2

	$T_1 > 0$ $T_3 > 0$	$T_1 < 0$ $T_3 < 0$	$T_1 > 0$ $T_3 < 0$	$T_1 < 0$ $T_3 > 0$
$\|T_3\|>\|T_1\|$	Christian **91** 2-**13-21** 27-28	Jacques **77** 2-11-**17** **23-24**	Olivier **12/56** .-.-.-**6-6**	
$\|T_3\|<\|T_1\|$		Didier **55**/112 .-3-**12** **16-24**	Vincent **10/56** .-.-.-**2-8**	

Recherche de T_1

	$T_2 < 0$
	$T_3 > 0$
$\lvert T_3\rvert > \lvert T_2\rvert$	
$\lvert T_3\rvert < \lvert T_2\rvert$	Bruno 31 1-2-7-8-13

Dans la recherche de T2, une nette hiérarchie apparaît entre les différents problèmes. Elle se traduit par un décalage qu'on peut estimer grossièrement.

- A un peu moins d'une année entre les problèmes Christian et Jacques.
- A une année entre les problèmes Jacques et Didier.
- A plusieurs années entre les problèmes Didier et les deux derniers problèmes Olivier et Vincent, qui sont manifestement au-dessus du niveau de l'enseignement du premier degré.

L'interprétation de ces résultats en termes de calcul relationnel est assez simple comme on le verra dans la conclusion. La procédure de recherche d'une transformation élémentaire connaissant l'autre transformation élémentaire, est nécessairement différente selon que les diverses transformations données sont de même signe ou de signe contraire : en effet dans le premier cas on trouve sa valeur absolue par différence des valeurs absolues des deux autres transformations et dans le second cas par sommation.

Lorsque les deux transformations données sont de même signe, les procédures de « différence » ou de « complément » qu'il est alors possible d'utiliser ne sont pas également naturelles, comme on peut le voir avec le problème Didier où T3 est plus petit que T1 en valeur absolue. Mais nous reviendrons sur cette question quand nous décrirons les différentes procédures possibles.

Nous n'avons établi de tableaux croisés et d'analyse hiérarchique que pour les problèmes relevant de la recherche de T2. Comme ces problèmes n'ont pas été tous présentés à tous les sujets, nous avons pris quelques précautions supplémentaires.

En premier lieu nous avons examiné les 56 sujets de CM1 et de CM2 qui ont passé les cinq problèmes. Le tableau VI donne le pattern des réussites et des échecs à ces cinq problèmes pour chacun des 56 sujets.

On peut observer une bonne hiérarchisation entre les Problèmes Christian, Jacques, Didier et le groupe Olivier-Clément, ces deux derniers problèmes n'étant pas hiérarchisés.

Tous les sujets qui réussissent le problème Jacques réussissent le problème Christian. Presque tous ceux qui réussissent le problème Didier réussissent les problèmes Jacques et Christian. Presque tous ceux qui réussissent l'un ou l'autre des problèmes Olivier et Vincent réussissent les trois premiers problèmes. On ne constate que cinq écarts à la hiérarchie (lignes 38-48-49-50-51).

Pour les trois premiers problèmes Christian, Jacques et Didier, on a également établi les tableaux croisés de réussites et d'échecs pour l'ensemble des sujets qui ont passé les items cencernés.

		Jacques R	Jacques E	
Christian	R	72	19	91
	E	5	44	49
		77	63	140

		Didier R	Didier E	
Jacques	R	49	26	75
	E	6	31	37
		55	57	112

		Didier R	Didier E	
Christian	R	53	36	89
	E	2	21	23
		55	57	112

Ces tableaux confirment la bonne hiérarchie observée plus haut puisqu'on trouve dans chaque cas un nombre relativement petit de sujets qui s'écartent du modèle hiérarchique.

TABLEAU VI

Analyse hiérarchique des problèmes consistant à rechercher T_3

		Christian	Jacques	Didier	Olivier	Vincent
	1	+	+	+	+	+
	2	+	+	+	+	+
5 sujets	3	+	+	+	+	+
	4	+	+	+	+	+
	5	+	+	+	+	+
	6	+	+	+	+	
	7	+	+	+	+	
5 sujets	8	+	+	+	+	
	9	+	+	+	+	
	10	+	+	+	+	
	11	+	+	+		+
	12	+	+	+		+
5 sujets	13	+	+	+		+
	14	+	+	+		+
	15	+	+	+		+
	16	+	+	+		
	17	+	+	+		
	18	+	+	+		
	19	+	+	+		
	20	+	+	+		
	21	+	+	+		
	22	+	+	+		
	23	+	+	+		
	24	+	+	+		
	25	+	+	+		
	26	+	+	+		
22 sujets	27	+	+	+		
	28	+	+	+		
	29	+	+	+		
	30	+	+	+		
	31	+	+	+		
	32	+	+	+		
	33	+	+	+		
	34	+	+	+		
	35	+	+	+		
	36	+	+	+		
	37	+	+	+		
1 sujet	38	+	+			
	39	+	+		+	
	40	+	+			
	41	+	+			
	42	+	+			
9 sujets	43	+	+			
	44	+	+			
	45	+	+			
	46	+	+			
	47	+	+			
	48	+		+		
3 sujets	49	+		+		
	50	+		+		
1 sujet	51	+			+	
	52	+				
4 sujets	53	+				
	54	+				
	55	+				

Ce tableau indique les patterns de réussites et d'échecs des 56 sujets de CM_1 et CM_2.
Une croix indique la réussite ; l'absence de croix l'échec.

TABLEAU VII

Comparaison des réussites selon le sexe et selon le type d'école

	F		G		Ecole		Sexe	
	EAB	COM	EAB	COM	EAB	COM	F	G
Pierre	30/35	25/35	31/35	33/35	61/70	58/70	55/70	64/70
Paul	22/35	17/35	25/35	26/35	47/70	43/70	39/70	51/70
Bertrand	21/35	24/35	25/35	27/35	46/70	51/70	45/70	52/70
Bruno	8/35	3/35	8/35	12/35	16/70	15/70	11/70	20/70
Claude	23/35	21/35	27/35	28/35	50/70	49/70	44/70	55/70
Christian	23/35	19/35	25/35	27/35	48/70	46/70	42/70	52/70
Jacques	19/35	14/35	23/35	21/35	42/70	35/70	33/70	44/70
Didier	16/28	11/28	15/28	13/28	31/56	24/56	27/56	28/56
Olivier	1/14	1/14	6/14	4/14	7/28	5/28	2/28	10/28
Vincent	2/14	1/14	4/14	3/14	6/28	4/28	3/28	7/28
Laurent	13/28	14/28	17/31	20/35	30/59	34/63	27/56	37/66
Michel	5/7	6/7	2/4		7/11	6/7	11/14	2/4

Les écarts au modèle hiérarchique

Une étude systématique des écarts au modèle hiérarchique a été faite pour l'ensemble des problèmes. Cette étude est trop longue pour être rapportée ici en détail. Elle ne révèle que 30 cas d'écarts à la hiérarchie qui proviennent de 23 sujets. C'est-à-dire que 117 sujets se comportent en tout point conformément au modèle hiérarchique.

A côté de quelques erreurs de calcul, on trouve surtout des biais de réponse : l'enfant fait systématiquement la même opération, addition ou soustraction, donnant ainsi éventuellement une réponse correcte à un problème difficile et une réponse incorrecte à un problème plus facile. Parfois un problème facile donne lieu à un échec parce qu'il est présenté après des problèmes plus difficiles déroutants pour l'enfant.

En ce qui concerne les biais de réponse, c'est surtout chez les petits du CP au CE2 qu'on trouve l'addition systématique, et seulement chez les grands du CM1 et du CM2 qu'on trouve la soustraction systématique.

Les différences entre écoles et entre sexes

Le tableau VII présente de façon synthétique les résultats obtenus selon l'école fréquentée et selon le sexe. On constate des différences relativement faibles.

Dans l'ensemble, si les garçons sont supérieurs aux filles et les enfants de l'école expérimentale supérieurs à ceux de l'école communale, cette différence peut tenir dans une large mesure à l'échantillonnage puisque l'école communale de filles (non mixte) donne toujours de mauvais résultats. Dans l'école expérimentale (Ecole Active Bilingue), la différence entre filles et garçons diminue beaucoup (elle persiste cependant et on constate aussi plus d'écarts au modèle hiérarchique parmi les filles : 15 contre 8).

On peut constater également la quasi équivalence des garçons de l'école communale et de ceux de l'école expérimentale.

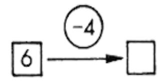
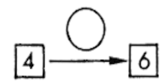
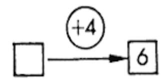
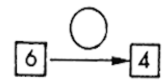
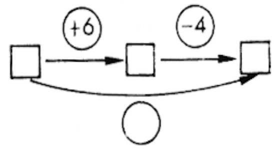
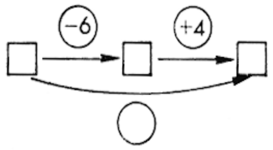
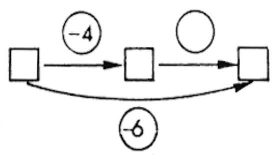
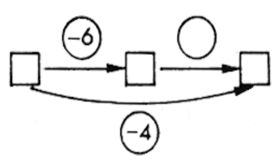
Nous ne saurions nous aventurer dans l'hypothèse d'une moindre différence entre filles et garçons lorsque l'école est mixte et expérimentale bien qu'il y ait là une explication possible des différences constatées. Nous ne retiendrons donc de ces comparaisons que la grande analogie des résultats dans tous les groupes de niveau. Cela nous conduit à considérer que les contraintes liées au développement sont dans cette affaire les plus décisives.

LES CALCULS RELATIONNELS ET LES PROCEDURES UTILISEES

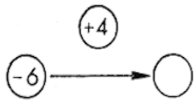
Ainsi l'arithmétique élémentaire additive ne forme pas un bloc homogène mais se compose au contraire de relations hétérogènes qui sont traitées différemment par les enfants. Cette différenciation n'est d'ailleurs pas propre aux enfants du premier degré mais se retrouve chez les enfants du second degré, et même chez les adultes.

L'analyse en termes de transformation et d'états et l'importance des différences constatées entre les différentes classes de problèmes permettent de considérer qu'il s'agit là d'une question générale, qu'on peut soulever pour toutes les situations de solution de problème et pas seulement pour la solution de problèmes arithmétiques.

Sur la même opération arithmétique viennent se projeter des calculs relationnels distincts qui sont loin d'être équivalents entre eux. C'est ainsi que la même soustraction 6 — 4 = 2 peut correspondre à la solution de problèmes aussi différents que les problèmes suivants, en regard desquels nous avons indiqué le schéma correspondant et le calcul relationnel qu'implique leur solution.

<table>
<tr><th>Enoncé</th><th>Schéma</th><th>Calcul relationnel</th></tr>
<tr><td>J'avais 6 billes, j'en perds 4. Combien en ai-je maintenant ?</td><td></td><td>Application d'une transformation à un état.</td></tr>
<tr><td>J'avais 4 billes, j'en ai 6. Que s'est-il passé ?</td><td></td><td>Recherche d'une transformation par différence de deux états (cas où T > 0).</td></tr>
<tr><td>J'ai 6 billes, je viens d'en gagner 4. Combien en avais-je avant de jouer ?</td><td></td><td>Application d'une transformation réciproque (— 4) à un état final pour trouver l'état initial.</td></tr>
<tr><td>J'avais 6 billes, j'en ai 4. Que s'est-il passé ?</td><td></td><td>Recherche d'une transformation par différence de deux états (cas où T < 0).</td></tr>
<tr><td>J'ai gagné 6 billes à une première partie, perdu 4 à la seconde. Que s'est-il passé en tout ?</td><td></td><td>Composition de deux transformations élémentaires.</td></tr>
<tr><td>J'ai perdu 6 billes à une première partie, gagné 4 à la seconde. Que s'est-il passé en tout ?
etc.</td><td></td><td>Composition de deux transformations élémentaires (cas différent du précédent).</td></tr>
<tr><td>J'ai perdu 4 billes à une première partie, et j'ai joué une seconde partie. J'ai perdu 6 billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ?</td><td></td><td>Recherche d'une transformation élémentaire, par différence de deux transformations.</td></tr>
<tr><td>J'ai perdu 6 billes à une première partie et j'ai joué une seconde partie. J'ai perdu 4 billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ?
etc.</td><td></td><td>Recherche d'une transformation élémentaire, par différence de deux transformations (cas différent du précédent).</td></tr>
</table>

Je devais 6 billes à mon voisin de classe. Je lui en rends 4. Combien lui en dois-je encore ? etc.



Application d'une transformation à un état relatif.

Les cas que nous venons d'évoquer sont loin d'épuiser les cas possibles et l'on mesure ainsi l'ampleur des expériences qui seraient nécessaires.

D'autre part, il n'existe pas qu'une seule voie pour résoudre un problème d'une classe donnée : le calcul relationnel indiqué en regard de chaque cas, dans la liste précédente, ne correspond qu'à une des méthodes possibles. Souvent les enfants recourent à des méthodes non canoniques qu'il est intéressant d'étudier parce qu'elles révèlent une certaine compréhension des relations en jeu et parce qu'elles préparent la découverte de la solution canonique, valable dans tous les cas. On constate d'ailleurs une évolution génétique des procédures utilisées.

Il est exclu de passer en revue toutes les procédures de solutions utilisées pour les différentes classes de problèmes envisagés. Nous nous contenterons de quelques exemples en partant des problèmes Claude, Christian, Bertrand, Bruno et Didier.

Dans le cas Claude où il faut trouver la transformation, connaissant l'état initial et l'état final, on rencontre deux procédures distinctes permettant la réussite :

La procédure de « complément » qui consiste à rechercher directement et sans soustraction ce qu'il faut ajouter à l'état initial pour trouver l'état final.

La procédure de « différence » qui consiste à soustraire l'état initial de l'état final, et qui suppose un certain calcul relationnel : si la transformation fait passer de l'état initial à l'état final, alors elle est égale à leur différence.

Dans le cas Bertrand, où il faut trouver l'état initial connaissant la transformation et l'état final, on rencontre également plusieurs procédures possibles :

la procédure canonique d'« inversion » qui consiste à inverser la transformation directe et à l'appliquer à l'état final.

la procédure de « complément » qui est parfois utilisée avec succès lorsque la transformation est positive, et qui consiste à rechercher directement ce qu'il faut ajouter à la transformation pour trouver l'état final ; elle conduit ici à l'échec pace que la transformation est négative.

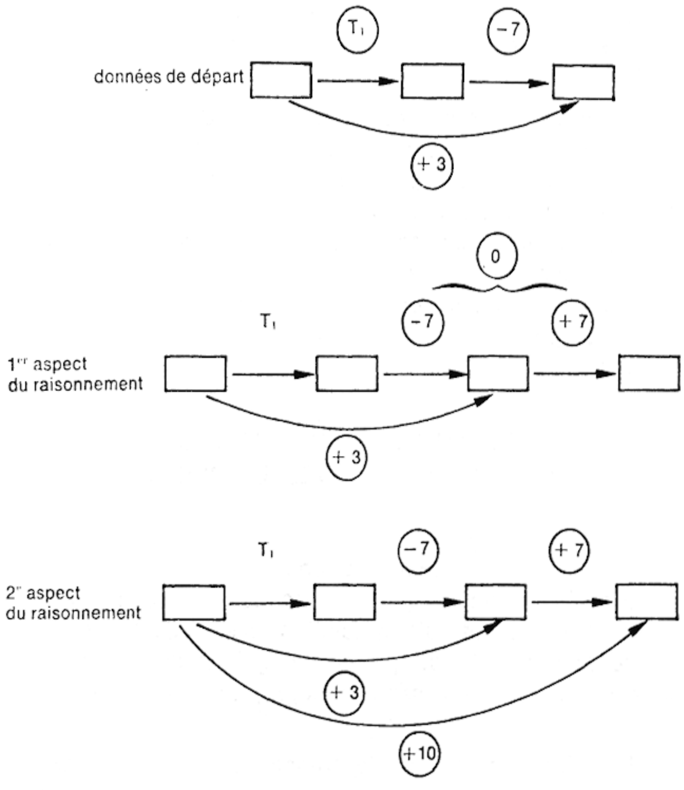
La procédure de l'état initial hypothétique qui consiste à se donner un état initial, à appliquer la transformation directe, à obtenir un état final et à corriger l'hypothèse de départ en fonction du résultat obtenu (comparaison de l'état ainsi trouvé et de l'état final donné dans l'énoncé).

Il existe encore d'autres procédures qui conduisent à l'échec (soustraction des deux nombres etc...). Ces procédures ont été étudiées avec plus de détail par Graciela Ricco, Virginia Guzman et Elena Porro.

Dans le cas Christian où il faut trouver la transformation T2 connaissant l'élémentaire T1 et la composée T3, on rencontre deux procédures analogues aux procédures de complément et de différence, rencontrées dans le cas Claude, ce qui explique le faible décalage observé dans les performances à ces deux problèmes. Un certain décalage subsiste cependant qu'on ne peut expliquer que par le niveau logique plus élevé des informations données et du calcul relationnel nécessaire (composition de deux transformations au lieu d'application d'une transformation à un état).

Dans le cas Bruno où il faut trouver la transformation T1 connaissant l'élémentaire T2 et la composée T3, les procédures utilisées sont différentes de celles utilisées dans le cas Bertrand :

la première procédure consiste à annuler la transformation négative —7 par la transformation positive opposée et à touver ainsi à quoi est équivalente la transformation T1. Le schéma ci-après montre différents aspects de ce raisonnement.



conclusion $T_1 + 0 = +10 \Rightarrow T_1 = +10$

La seconde procédure consiste à considérer que pour perdre 7 billes à la seconde partie Christian devait avoir 7 billes (ou en avoir gagné 7 au moins à la première partie). Comme il en a gagné 3 en tout, il faut qu'il en ait gagné 7 + 3 = 10 à la première partie.

Cette procédure est assez analogue à la procédure de l'état initial hypothétique vue dans le cas Bertrand, mais l'hypothèse faite sur la première transformation est ici unique. D'autre part, l'enfant considère assez volontiers la première transformation comme un état initial (avoir 7 billes) ce qui l'aide à résoudre le problème mais montre en même temps la complexité logique moins grande de la notion d'état.

Il existe encore d'autres procédures qui conduisent le plus souvent à l'échec. En tous cas il n'y a pas, entre les problèmes Bertrand et Bruno, une transposition aussi simple des procédures utilisables qu'entre les problèmes Claude et Christian. D'où le décalage important des performances.

Dans le cas Didier (et ce sera notre dernier exemple) où il faut trouver T2 connaissant T1 et T3 (T1 et T3 négatifs, $|T3| < |T1|$), la procédure de « complément » n'est pas utilisable sans précautions, puisque la valeur absolue de T2 se calcule non pas dans le sens naturel (ce qu'il faut ajouter à $|T1|$ pour trouver $|T3|$) mais dans le sens inverse (ce qu'il faut ajouter à $|T3|$ pour trouver $|T1|$), et il en va de même de la procédure de « différence ». On ne saurait donc s'étonner de la réussite relativement tardive de ce problème.

CONCLUSION

L'analyse théorique et expérimentale qui précède demeure évidemment partielle et schématique. Les compléments qu'elle appelle sont de plusieurs sortes :

- étude de tous les cas de relations (5 catégories) et de toutes les classes de problèmes ;
- variation systématique du contenu des problèmes et de la forme des relations. Les relations peuvent notamment être formulées en termes de transformation (gagner, perdre, monter, descendre...) ou de relation (avoir en plus, en moins...) ;
- utilisation de nombres ne permettant pas l'utilisaton des procédures les plus élémentaires ;
- variation systématique de la forme syntaxique et de l'ordre des informations données dans l'énoncé ;
- utilisation de situations réelles ;
- étude de problèmes additifs complexes où se retrouvent à titre de composantes, les cinq grandes catégories de relations que nous avons décrites ;

Aussi bien cet article ne cherche-t-il à fournir qu'une première approche des problèmes posés et un cadre théorique assez rigoureux pour que l'étude de la solution des problèmes d'arithmétique sorte de l'empirisme qui la caractérise trop souvent.

Gérard VERGNAUD et Catherine DURAND
C.N.R.S., Centre d'étude des processus cognitifs et du langage,
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

Bibliographie

Ricco (G.), Gurzman (V.), Porro (E.). — **Etude du raisonnement portant sur l'inversion de transformations arithmétiques additives.** — Document ronéoté du Centre d'Etude des Processus Cognitifs et du Langage, Paris.