Relations entre grandeurs et notions mathématiques

Texte non publié

1978, 14 pages

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1978_Relations-Grandeurs_Texte-Recherche

SEMINAIRE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

7 et 8 janvier 1978

RELATIONS ENTRE GRANDEURS ET NOTIONS MATHEMATIQUES

Gérard VERGNAUD

RELATIONS ENTRE GRANDEURS
ET NOTIONS MATHEMATIQUES*

J'ai été l'un de ceux qui ont le plus insisté lors du dernier séminaire pour qu'un prochain séminaire soit consacré aux relations entre physique et mathématiques, de même que j'ai délibérément orienté la Table Ronde du mois de mai dernier sur le thème "didactique des sciences et psychologie" pour amener les mathématiciens et les physiciens à poser de façon plus commune les problèmes d'enseignement qu'ils peuvent rencontrer.

Les raisons de cette insistance tiennent à ma conviction, de psychologue, que les problèmes de conceptualisation du réel se posent pour l'enfant, pendant une longue période, de façon presque indistinctement physique et mathématique.

Non pas bien entendu qu'il n'y ait une spécificité des concepts mathématiques qui, une fois formés, ont une existence propre et se prêtent à des analyses et à des exercices propres. Mais il est indispensable de ramener le mathématicien, qui n'a que trop tendance à considérer qu'il n'a de compte à rendre à personne et que le discours mathématique se suffit à lui-même, à cette sévère vérité qui est que le concept mathématique n'a pas de sens s'il est coupé de ses références au monde matériel.

C'est donc sur le terrain de l'épistémologie qu'inévitablement va glisser mon propos, mais je vais essayer, pour ne pas tomber dans des considérations philosophiques trop générales, de mettre en avant des remarques et des observations directement tirées des acquisitions cognitives de l'enfant.

* Ce texte est le texte original d'un exposé oral, ce qui explique certains aspects du style.

Le terrain de l'épistémologie n'est pas lui-même sans rapport avec la question, idéologique et politique celle-là, de l'appropriation des connaissances; et certaines remarques que je ferai ne seront pas neutres de ce point de vue.

Mais l'essentiel est quand même, à mon avis, et dans l'état actuel de notre travail collectif, de circonscrire le débat à la psychologie des processus d'acquisition des connaissances et à la didactique. C'est sur ce terrain principalement que je souhaite intervenir et que je souhaite être interrogé.

On m'a parfois accusé de défendre une conception ouvriériste de l'enseignement des mathématiques, ou parfois à l'inverse sur la base d'un exemple anecdotique de problème portant sur les trains de première classe, on m'a aussi reproché de développer des thèmes ne faisant pas appel à l'expérience quotidienne de l'enfant et de ce fait, dénués de sens.

En fait, c'est à un autre niveau, qui n'a rien à voir avec l'anecdote, que je souhaite poser le problème. Ce niveau est en gros le suivant:

Le monde matériel est formé d'objets de différents niveaux dont les propriétés observables ou non observables sont parfois purement qualitatives, parfois ordonnables, parfois mesurables. Ce sont les relations entre grandeurs mesurables (observables ou non) qui forment l'objet même de la physique quantitative. Ce sont elles aussi qui servent de base explicite ou implicite à une majeure partie de la mathématique enseignée à l'école élémentaire et dans le premier cycle du second degré, encore que les aspects purement qualitatifs aient été assez largement développés à la faveur de la réforme de l'enseignement des mathématiques.

Ces relations entre grandeurs sont d'une conceptualisation plus difficile qu'il ne peut y paraître pour un adulte. Ces difficultés ont des conséquences directes sur l'acquisition des concepts mathématiques, même si on enseigne les mathématiques avec l'illusion qu'on a détaché celles-ci de toute référence physique.

Par exemple, on ne souligne jamais la thèse que sans mesure il n'y aurait pas de nombre, mais c'est pourtant la mesure des ensembles discrets finis qui supporte tout entière le nombre, au niveau de l'action de l'enfant qui apprend à compter et au niveau du sens qu'il peut accorder dans un premier temps, qui dure longtemps, aux nouveaux objets ainsi construits.

De même la notion de transformation en plus ou en moins est-elle susceptible de préparer l'introduction du concept de nombre relatif mais, même lorsqu'une telle approche n'est pas utilisée et que le nombre relatif n'est référé à rien d'autre qu'à une classe de couples ou à la clôture algébrique des équations a + x = b, rien ne garantit au professeur que l'élève ne cherche pas, quand même, à donner au nombre relatif un sens qui lui échappe, en le rapportant à des transformations ou à des relations en plus ou en moins.

De telle sorte que je qualifierai volontiers de fuite, la "définitionite" qui consiste à enfermer le discours mathématique dans un univers clos de définitions dont on croit à tort que parce qu'il est clos pour le maître, il donne à l'élève une pâture suffisante et lui enlève le besoin d'en franchir les frontières. En fait l'élève franchit allègrement ces frontières et il a raison, pour le meilleur et pour le pire.

- Pour le meilleur parce que c'est seulement en recherchant et en retrouvant dans la conceptualisation du réel les sources des concepts et des opérations mathématiques qu'il est possible, pendant toute une phase au moins de l'apprentissage des mathématiques, de faire du discours mathématique quelque chose d'opératoire et de lié à l'action.

- Pour le pire parce que ce n'est pas une voie sans embûches mais au contraire une voie dans laquelle on se heurte inévitablement à deux difficultés de taille.

La première concerne le type de difficultés véhiculées par les aspects non strictement mathématiques des concepts et des pré-concepts.

La seconde est liée à la coupure, qui est rendue alors nécessaire au cours de l'apprentissage, entre les sources du concept mathématique et ce que le mathématicien décide d'en retenir.

Mon premier exemple sera celui des relations de type multiplicatif entre grandeurs, mais j'essaierai ensuite de regarder avec la même lunette les relations de type additif.

J'écris trois égalités:

$$c = a \times b \qquad d = v \times t \qquad s = l_1 \times l_2$$

La première est une relation entre nombres dont la dimension n'est pas spécifiée, ou encore sans dimension.

La seconde est une relation entre la distance parcourue, le temps et la vitesse uniforme.

La troisième est une relation entre la surface du rectangle et les deux dimensions linéaires du rectangle.

La première de ces trois relations s'analyse de façon habituelle comme une loi de composition interne. Cela ne peut pas être le cas des deux autres puisque les nombres représentent alors des grandeurs de dimension différente. Dira-t-on que l'on a fait abstraction des dimensions et que la relation numérique est analogue à celle du premier exemple? On le peut mais alors on s'interdit de s'interroger de façon complète sur la façon dont l'enfant peut essayer de comprendre et de résoudre des problèmes mettant en jeu la vitesse uniforme et la surface. On s'interdit de comprendre comment l'enfant peut mettre un problème en équation. On s'interdit de comprendre de nombreuses difficultés rencontrées par l'enfant dans la compréhension des équations, des fonctions, des notions vectorielles.

Pour commencer à poser ces questions, il faut inévitablement introduire l'analyse dimensionnelle; mais celle-ci doit être poussée assez loin car on ne peut s'en tenir à l'affirmation brutale que la distance est le produit d'une durée par une vitesse comme la surface est le produit de deux longueurs; simplement parce que c'est faux.

C'est ce qui m'a conduit à distinguer, pour rendre compte des problèmes d'arithmétique élémentaire que l'enfant rencontre dans sa vie quotidienne et à l'école élémentaire, problèmes qu'inévitablement il continue à envisager de manière au moins implicite lorsqu'il apprend les mathématiques dans le premier cycle du second degré, deux grandes structures relationnelles:

- La première est celle de l'isomorphisme de mesures, dans lequel deux mesures sont proportionnelles l'une à l'autre:

. des paquets identiques entre eux et les quantités d'objets qu'ils contiennent.

. des quantités d'objets ou de marchandises et leur prix uniforme.

. des durées et des distances parcourues à une vitesse uniforme.

. des longueurs et des quantités d'objets distribuées le long de ces longueurs de façon régulière.

. des surfaces et des poids moyens de récolte.

des volumes et des masses correspondantes d'une même matière, etc.

Il y a en fait toujours 4 grandeurs en relation et non pas 3. La relation ternaire ou la loi de composition binaire sont donc déjà le résultat d'une analyse de la relation quaternaire fondamentale qu'on peut formuler ainsi:

" le prix de trois bouteilles est au prix d'une bouteille ce que trois bouteilles sont à une bouteille".

" la distance parcourue en trois heures est à la distance parcourue en une heure ce que trois heures sont à une heure".

Ou encore, "la distance parcourue en trois heures est à trois heures ce que la distance parcourue en une heure est à une heure".

La forme mathématique la plus adéquate est celle de la fonction linéaire couplée avec l'analyse dimensionnelle suivante:

deux dimensions élémentaires et la dimension quotient: vitesse, masse spécifique, densité de longueur ou de surface, prix unitaire, etc.

Cette commune analyse ne suffit d'ailleurs pas pour affirmer que les concepts sous-jacents sont traités de la même façon. Le prix d'une quantité a peut être une notion seconde par rapport au prix unitaire p et la quantité a (dont elle est le produit) sans qu'on puisse pour autant affirmer une chose analogue pour la distance, le temps et la vitesse. Non seulement il serait aberrant de concevoir la distance comme une notion seconde par rapport à la vitesse et à la durée, mais, si dans beaucoup de cas on peut considérer que c'est la dimension quotient qui est une notion dérivée par rapport aux deux dimensions élémentaires, ce n'est pas nécessairement le cas dans la relation $d = vt$, et certaines recherches de Piaget et d'autres tendent à montrer que, à certains égards au moins, c'est le temps qui est second et non la vitesse.

Je reviendrai tout à l'heure sur l'isomorphisme de mesures pour détacher encore d'autres questions qui ne sont pas subalternes, mais je veux d'abord aborder l'autre grande structure.

- La deuxième grande structure est celle du produit de mesures proprement dit, dans lequel une grandeur est dérivée de deux autres plus élémentaires par l'opération de produit. C'est le cas de la surface, du volume et de nombreuses autres grandeurs physiques.

La forme mathématique adéquate est celle de la bilinéarité et l'analyse dimensionnelle apparemment plus simple

$s = l_1 \times l_2$ au lieu de $d = vt$ (v étant un quotient de dimensions)

ne se traduit pas nécessairement par une plus grande facilité du concept.

Les hypothèses sur lesquelles nous travaillons à Orléans, en n'étant pas nécessairement unanimes sur ces hypothèses, et je n'engage donc que moi pour l'instant, sont en gros les suivantes:

1/ Ce n'est pas le produit de mesures mais la proportionnalité simple qui est la relation de type multiplicatif la plus simple pour l'enfant. Si cela est vrai, alors l'introduction de la multiplication par le produit cartésien à l'école élémentaire est discutable et il faut peut-être regarder de plus près l'enseignement du calcul de l'aire et du volume.
Quelques observations à l'appui de cette hypothèse:

- l'échec massif des enfants au début du 1er cycle à calculer le volume du parallélépipède.

- le recours des enfants à des formules stéréotypées ou au contraire à des représentations non-volumiques dès qu'ils sont en difficulté.

Afin de préciser un peu, je citerai l'observation suivante: soit une grandeur variant en fonction de deux autres grandeurs (bilinéarité), par exemple la production de lait d'une ferme en fonction du nombre de vaches v et du nombre de jours j. Si l est la quantité de lait produite en moyenne par une vache en un jour, 2/3 des enfants de sixième calculent sans hésiter le produit:

$$l \times v \times j$$

1/3 seulement de ces enfants sont capables de calculer le volume du parallélépipède rectangle $L \times l \times h$.

C'est au plan du concept qu'à mon avis il faut chercher la raison principale des difficultés, non point dans les caractéristiques des nombres en jeu. Dans un cas, une double proportionnalité mais pas de produit de mesure (le lait n'est pas le produit du lait par le temps et par les vaches). Dans l'autre, un produit de trois mesures et une fonction "trilinéaire" qui, n'ayant pas été élucidée ne saurait en tout état de cause éclairer l'élève de sixième.

Revenons à la proportionnalité simple, ou plus exactement à l'isomorphisme de mesure, un autre problème qui donne lieu à notre deuxième hypothèse, se pose.

2/ Ce n'est pas le rapport de proportionnalité entre les deux séries proportionnelles ou encore l'opérateur-fonction qui fait passer d'une mesure du premier espace à la mesure correspondante du second espace qui est le plus aisément compris par l'enfant, c'est plutôt le rapport de type scalaire qui relie deux mesures du même espace entre elles et les mesures correspondantes de l'autre espace.

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

serait au plan de la solution de problème et selon cette hypothèse un théorème en acte mieux approprié et plus tôt que la définition de la fonction linéaire

$$f(x) = ax$$

Là encore plusieurs observations accréditent cette thèse, incompréhensible si l'on ne prend pas en considération les aspects dimensionnels.
Beaucoup de recherches et de contrôles sont évidemment nécessaires pour vérifier et préciser ces hypothèses. J'ai voulu seulement évoquer les grandes lignes.

L'analyse dimensionnelle est récente dans l'histoire de la physique (Fourier, Maxwell) et dans l'histoire des mathématiques (Vaschy, 1891).

Elle est née de considérations sur les unités et les changements d'unités et le théorème de Vaschy (d'après ce petit livre* que m'a procuré Patrick Marthe) montre que, à partir d'une condition fonctionnelle sur la notion de mesure: à savoir qu'une grandeur n'est mesurable que si son rapport à une autre grandeur est invariant sur tous les changements d'unités concernant les variables dont elle dépend.

* Référence: Monod-Herzen, G - l'analyse dimensionnelle et l'épistémologie, Maloine-Doin, Paris, 1976.

Alors il résulte que "toutes les expressions mesurables de grandeurs physiques mesurables sont proportionnelles à des produits de puissances des mesures des variables qui y figurent". L'analyse dimensionnelle et la linéarité sont donc intrinsèquement liées entre elles. Ce n'est pas une découverte, mais c'est un fait dont il n'est guère tenu compte dans l'enseignement.

Pourquoi ne pas introduire l'analyse dimensionnelle sous une forme adéquate, pourquoi surtout ne pas utiliser des représentations mathématiques fonctionnelles intermédiaires entre les énoncés en langage naturel et les calculs d'une part, et les représentations dans lesquelles les variables et inconnues sont toutes et seulement numériques d'autre part. Les distinctions entre dimensions, entre scalaires et vecteurs "dimensionnés", entre dimensions élémentaires, produits et quotients ayant alors disparu. Les solutions utilisées par les élèves montrent que rares sont ceux qui, jusqu'en troisième, peuvent faire abstraction des aspects dimensionnels. Parmi les solutions possibles, sont écartées presque toutes celles qui reviennent à faire des calculs intermédiaires qui n'ont pas de signification physique.

Deux exemples:

On trouve des décompositions additives

$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$$

jamais des décompositions du type

$$f(x) = (\lambda a + \lambda' a')x$$

Autre exemple, pour trouver le lait produit par v vaches en j jours, on ne trouve guère comme calcul intermédiaire le produit de v par j, mais seulement le produit de l par v ou de l par j.

La notion de dimension ne s'applique pas bien aux relations additives puisqu'il va de soi qu'on ne peut ajouter ou soustraire que des grandeurs de même nature. Pourtant cela n'exclut pas qu'on s'interroge sur l'intérêt qu'il peut y avoir à différencier davantage les nombres selon ce qu'ils représentent. Une mesure et une translation dans un espace de mesure, cela est-il de même nature, cela a-t-il en quelque sorte la même dimension?

Bien sûr j'abuse un peu du langage, mais entre une mesure et une translation c'est-à-dire une classe de couples de mesures, il y a non seulement au plan conceptuel, une différence de type logique, mais il y a également au plan des nombres correspondants une différence de nature. Il est naturel de composer deux mesures ou deux transformations additives (encore que ces dernières se situent à un autre niveau logique), mais composer une transformation et une mesure, à quoi cela ressemble-t-il? Pas à une loi interne, pas même à une opération dans $\mathbb{Z}$, sauf à identifier $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}+$,ce qui ne va pas sans problème comme chacun sait.

Composer additivement deux mesures, cela donne une mesure. Composer additivement deux transformations,cela donne une transformation, mais composer une mesure et une transformation, cela donne quoi?

L'analogie est évidente avec la composition multiplicative d'un temps et d'un opérateur-fonction comme la vitesse.

C'est d'une application qu'il s'agit qui applique dans lui-même l'ensemble des mesures d'une certaine nature.

Aucune écriture numérique simple ne rend correctement compte de cet aspect des choses, mieux mis en évidence par des schémas sagittaux. Ce qui m'amène au dernier aspect de mon intervention.

J'aurais pu reprendre, avant d'aborder ce dernier point, quelques problèmes plus précoces, du point de vue des acquisitions cognitives, posés par le concept de dimension, notamment dans la genèse de l'activité classificatoire et dans l'abstraction ou le détachement des dimensions orthogonales d'une classification. Cela aurait permis de montrer combien, au plan de la conceptualisation du réel, on rencontre de façon récurrente et à plusieurs niveaux les problèmes de dimension.

Mais je préfère revenir au problème qui était contenu dans le titre de mon exposé:

"relations entre grandeurs et notions mathématiques"

Ce que j'ai développé jusqu'à maintenant concerne principalement les difficultés d'ordre cognitif posées par la conceptualisation des différentes sortes de grandeurs, et par celle des compositions additives et multiplicatives des grandeurs entre elles lorsqu'elles sont de même nature ou de nature différente.
J'ai plus ou moins proposé qu'une certaine forme frugale d'analyse dimensionnelle soit abordée avec les élèves, à la fin de l'enseignement élémentaire et en tout cas dans le premier cycle du second degré, mais je voudrais aussi montrer que d'autres moyens pédagogiques, assez élémentaires, permettent de mieux différencier les objets différents qui sont en jeu dans les problèmes et de retarder (et de préparer en même temps) l'introduction des différentes catégories de nombres et d'équations numériques.

Les schèmes sagittaux et les tableaux de correspondance notamment, permettent de mieux marquer les différences entre mesures et transformations, entre mesures de différentes sortes, entre opérateurs de type scalaire et opérateurs de type fonction. Ils permettent de prendre en considération l'ordre temporel, dont il est à mon avis aberrant qu'il soit ignoré de la symbolisation mathématique; ils permettent aussi de régionaliser dans l'espace les différentes sortes de mesures, et de mieux repérer les cheminements possibles dans la solution d'un problème.

D'autres voies sont possibles, par exemple la différenciation des symboles dans les équations selon qu'ils représentent tel ou tel type de grandeur, ou tel ou tel type d'opérations, mais cette algèbre différenciée, par exemple l'algèbre vectorielle, devrait de toutes façons être introduite à partir des schémas sagittaux et des tableaux, et en tout état de cause, l'écriture algébrique soulève des difficultés que ne soulèvent pas les schémas.

Pour illustrer ce point, je ne prendrai qu'un exemple, celui du signe - .
On s'accorde en général à reconnaître que le signe - peut désigner:

. soit l'opération de différence dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{D}$, $a + x = b$ alors $x = b - a$.

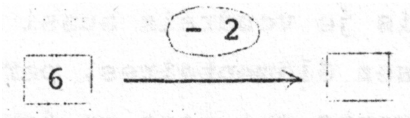
. soit un nombre relatif négatif.

soit encore l'opération de différence dans $\mathbb{Z}$ $a + x = b$

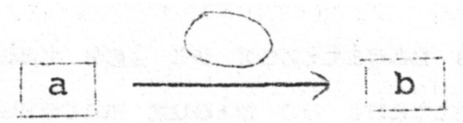
$$x = b - a$$

Je vais faire une analyse rapide qui montre que le signe - a plusieurs autres significations distinctes des précédentes.

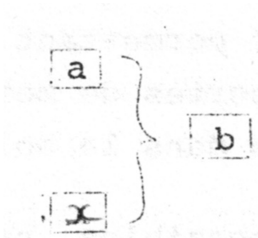
. Une signification indépendante de l'addition, en ce sens qu'elle peut être comprise sans qu'il soit fait référence à l'addition comme dans le schéma suivant où le signe - désigne une transformation négative (perdre, descendre, reculer...).



Une signification de différence b a entre deux états a et b (a et b appartenant à un espace de mesures)

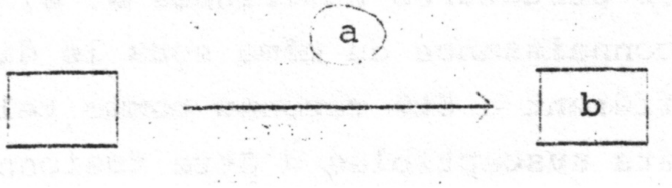


Pour deux raisons (l'existence d'un ordre temporel d'une part, la possibilité d'avoir $b < a$ d'autre part), ce cas est à distinguer du cas des sommes de mesures que je symboliserai de la façon suivante:



et dans lequel on retrouve l'opération de différence dans $\mathbb{N}$ (ou dans $\mathbb{D}+$) de tout à l'heure.

. Une autre signification est celle de l'opération d'inversion d'une transformation directe comme dans la recherche d'un état initial connaissant l'état final et la transformation directe, celle-ci pouvant être positive ou négative.



On voit ainsi que dans ces 2 derniers cas, le théorème

$$a + x = b \Longrightarrow x = b - a$$

n'a pas la même signification, le - signifiant dans un cas une différence entre états, dans l'autre cas une inversion de transformation.

. Une autre signification encore est celle de l'état relatif (dette, créance par exemple) qui est analogue à la notion d'abscisse négative sur un axe, mais qui ne se conçoit pas cependant de la même façon, dans la mesure où elle fait intervenir deux repères et peut entraîner de ce fait des ambiguïtés. Témoignage: l'embarras des gens à l'égard des notions comptables (débit, crédit, passif, actif, etc.).

. Une autre signification est celle de l'opération de différence entre transformations, ou entre relations.

. Et une autre encore est celle de l'opération d'inversion d'une transformation opérant sur un état relatif.

Je ne complique pas les choses à plaisir. Je cherche seulement à montrer que, dès lors qu'on prend en compte les notions de temps, de mesure, de transformation et de relation, alors il apparaît que les mêmes symboles mathématiques recouvrent des concepts distincts dont on imagine aisément que l'élève ait quelque mal à les désigner par le même signe et surtout à trouver évidentes les règles d'utilisation mathématiques, pourtant cohérentes avec les différentes significations possibles.

Le processus de conceptualisation du réel consiste entre autres traits à reconnaître le même sous le différent et je ne contesterai pas la nécessité de conduire l'élève à abstraire les propriétés communes des objets distincts qu'il peut considérer pou construire les structures numériques $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, mais je crois que cette reconnaissance du même sous le différent n'a de sens que si le différent a été reconnu comme tel et si les différentes sortes d'objets susceptibles d'être fusionnées en un même concept ont elles-mêmes été identifiées, dans un premier temps comme des concepts distincts.

On peut faire de la bonne mathématique avec des objets plus différenciés que les objets mathématiques actuels, on peut faire de la bonne mathématique avec des schémas, et il n'y a aucune raison de déléguer au physicien et au second cycle la charge d'aborder la question fondamentale dès le premier cycle de l'analyse dimensionnelle.

Si l'on se donne comme critère de la connaissance opératoire la capacité d'utiliser les connaissances en situation de solution de problème et notamment dans des situations concrètes (ou plus précisément dans des problèmes formulés en langage naturel, alors les questions que je viens d'évoquer sont au centre des réflexions sur les contenus.

Si l'on veut que le maître commence à comprendre et à interpréter les erreurs ou les découragements de ses élèves, il faut je crois intégrer dans la problématique de la didactique des mathématiques, certaines au-moins des préoccupations que j'ai développées.

Ces questions didactiques ne sont neutres ni du point de vue de l'épistémologie des mathématiques, ni du point de vue du rapport des enfants au savoir et à l'école.