Colloque « Constructivisme »

In Colloque Constructivisme

1987 (juillet)
Montréal, Québec

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1987_Colloque_Constructivisme-Montreal

Colloque constructivisme

Intervention de Gérard Vergnaud

Le problème n'est pas seulement de montrer que les idées n'existent pas de toute éternité et attendraient d'être rappelées dans la tête des hommes comme le pensait Platon, ni qu'elles seraient issues d'une simple lecture empirique du réel comme le pensait Hume. Il faut en outre essayer de comprendre pourquoi et comment Platon, et beaucoup de mathématiciens jusqu'à aujourd'hui, ont pu adopter une telle position épistémologique, et pourquoi Hume et d'autres scientifiques ont pu adopter la position inverse. Je ferai plus loin une tentative dans ce sens.

L'épistémologie des mathématiques est une chose ; l'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques en est une autre, qui nous en dit un peu plus d'une certaine manière : tout en s'appuyant sur la première, elle étudie dans la durée les filiations et les ruptures, c'est-à-dire justement ce mouvement de la pensée, que l'histoire étudie également, mais sur une période mille fois plus longue et à travers les œuvres de mathématiciens adultes. L'étude de l'apprentissage des mathématiques offre un raccourci saisissant.

Kronecker disait que Dieu avait donné aux hommes le nombre entier et que l'homme avait fait le reste. Il faut reconnaître aujourd'hui qu'il n'a même pas donné le nombre entier, pas plus d'ailleurs que les concepts de relation d'équivalence et de relation d'ordre, dont le développement précède et accompagne celui du nombre. Tous ces concepts sont construits par l'homme et par l'enfant au cours de leur activité.

Ils n'ont pas été et ne sont pas toujours explicites, et c'est ce qui peut conduire les mathématiciens à juger que les enfants ne font pas de mathématiques à l'école élémentaire. Jugement étrange lorsqu'on sait que les enfants à la fin de l'école élémentaire aujourd'hui apprennent des techniques opératoires qu'une infime minorité de personnes à la Renaissance, y compris de mathématiciens, étaient capables de pratiquer. Les mathématiciens arabes ont eu pendant plusieurs siècles une avance significative sur les mathématiciens européens, puis les Italiens sur les Français et les Allemands : on apprenait les multiplications et les divisions dans les universités italiennes, peu en France et en Allemagne. Montaigne lui-même ne savait pas calculer. Comment peut-on ne pas être constructiviste ?

Quels objets mathématiques sont-ils construits par les enfants? et comment cette construction se manifeste-t-elle ?

Je voudrais défendre trois thèses distinctes, bien que liées les unes aux autres.

1/ La première thèse est que les concepts mathématiques sont d'une grande diversité, que leur développement fait corps avec celui de concepts non strictement mathématiques, et que ces ensembles évolutifs de concepts forment des systèmes à tout moment du développement de l'enfant. C'est ce qui m'a conduit à parler de champ conceptuel.

2/ La seconde thèse est que la conceptualisation est un processus vital, moteur et conséquence de l'adaptation, qui prend place d'abord et avant tout dans des situations : situations dans lesquelles le sujet peut et doit agir, percevoir et prévoir. Il faut donc des concepts théoriques qui permettent d'identifier la place de la conceptualisation dans l'action. Le concept de schème est essentiel pour cela, celui d'invariant opératoire également.

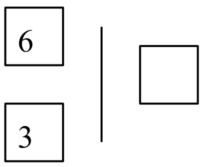
3/ La troisième thèse est que les situations auxquelles l'enfant est confronté sont, pour la plupart d'entre elles, fabriquées par la culture (notamment par l'école, mais pas seulement) ; et qu'en outre les mots, les énoncés, les arguments imprègnent de leur marque la manière dont sont identifiés les objets mathématiques, leurs propriétés, leurs transformations. Le langage est donc essentiel lui aussi, et l'on peut même dire, avec Vygotski et Piaget, qu'un concept n'est pas totalement un concept tant qu'il n'est pas formulé, lui et ses propriétés.
Mais alors qu'y a-t-il avant ?

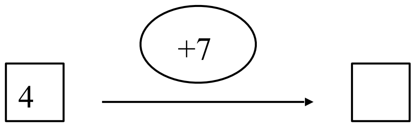
Avant de répondre à cette question j'ai besoin de brosser le tableau de quelques exemples de champs conceptuels.

Première thèse : celle de la variété des concepts collaborant à la conceptualisation d'un même champ conceptuel.

J'ai beaucoup étudié la résolution des problèmes d'addition et de soustraction et c'est certainement l'un des exemples les mieux connus aujourd'hui. On sait notamment, que la résolution des problèmes d'addition et de soustraction ne repose pas que sur l'addition et la soustraction des nombres, mais également sur des concepts qui permettent de saisir les relations entre quantités et entre grandeurs, ainsi qu'entre les transformations et les relations de relations qui en dérivent. Les deux modèles prototypiques de l'addition, ceux par lesquels les enfants commencent à lui donner du sens, sont d'une part la réunion de deux parties connues en un tout inconnu, et d'autre part la transformation connue d'un état initial connu en un état final inconnu.

Six filles, trois garçons ; combien d'enfants en tout ?



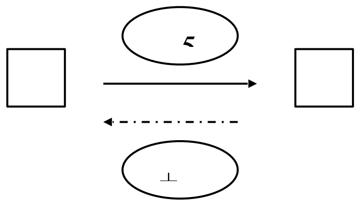


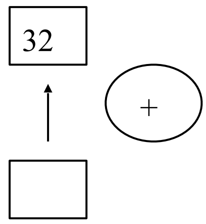
Pierre avait quatre billes, il en gagne sept ; combien en a-t-il maintenant ?

Dire cela c'est déclarer que les concepts de partie, de tout, d'état, de transformation, d'état initial et d'état final sont indispensables à la conceptualisation de l'addition des nombres, qui repose en outre sur les concepts de cardinal, d'ordre et d'itération de l'unité. Mais c'est dire en même temps, puisque les problèmes d'addition ne se ramènent pas tous à ces deux prototypes, que d'autres concepts vont devoir être formés progressivement par les enfants :

- par exemple, celui d'inversion d'une transformation : si j'ai dépensé 5 francs chez le pâtissier et que je cherche à reconstituer combien j'avais auparavant, il me faut rajouter les 5 francs dépensés à ma fortune actuelle ;
- ceux de relation d'ordre quantifiée, de grandeur de référence, de grandeur référée, de relation réciproque : si ma cousine me dit que son père a 32 ans et qu'il a 3 ans de moins que

sa mère, je dois comprendre que l'âge de la mère est le référent, l'âge du père le référé et que la relation doit être inversée pour trouver le référent à partir des données : addition des 3 ans de moins.

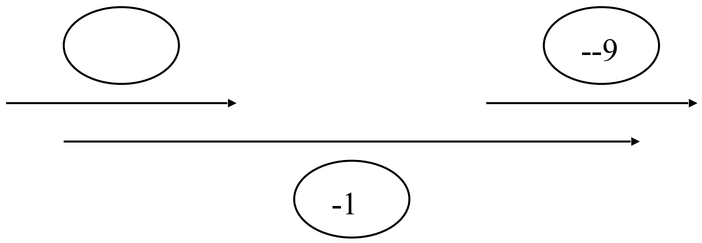




La soustraction et l'addition semblent aller de pair, mais c'est une idée qui n'est vraie que partiellement. La soustraction est bien l'alter ego de l'addition s'il s'agit de transformations du type gagner/perdre, augmenter/diminuer, ou s'il s'agit de transformations ou relations réciproques l'une de l'autre comme dans l'exemple de l'âge de la mère et dans celui du calcul de ma fortune avant d'aller chez le pâtissier.
Contrairement à l'addition, qui a deux prototypes, le prototype de la soustraction est unique :
-la diminution connue d'une quantité initiale connue : j'avais 12 francs, je dépense 9 francs. Combien me reste-t-il ?
L'extension d'une opération de soustraction à des classes de problèmes plus complexes suppose donc la formation de concepts supplémentaires : ceux de complément et de différence et, bien entendu, d'inversion et de réciproque.

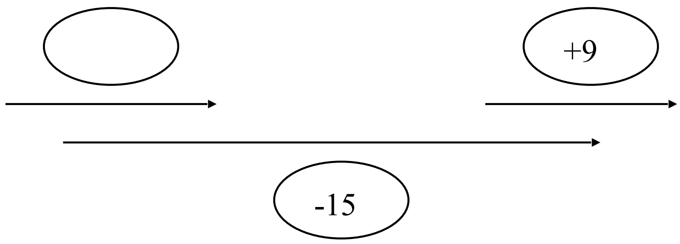
Et les choses ne s'arrêtent pas là. En effet dès qu'on a à faire à des transformations et à des relations, on rencontre le problème des compositions de nombres de signes contraires, et de décomposition d'un nombre en nombres de signes contraires. Pour le mathématicien, il s'agit de nombres relatifs, positifs et négatifs ; l'élève, quant à lui, avant qu'on lui explique comment on peut mettre en équation dans Z (ensemble des nombres relatifs) un problème comportant des transformations et des relations positives et négatives, ne peut que recourir à une sorte d'équivalent conceptuel des nombres relatifs, dont la portée est inévitablement limitée aux cas les plus favorables :

Par exemple si je déclare à un élève de 12 ans que Robert a perdu 15 billes en tout au cours de la journée et qu'il en a perdu 9 l'après-midi, cet élève peut reconstituer aisément que Robert en a perdu 15-9 = 6 le matin.



Si Robert en a perdu 15 en tout et perdu 22 l'après-midi, il est déjà un peu plus délicat à l'élève de 12 ans de reconstituer ce qui s'est passé le matin : parce que le tout est plus petit que la partie (en valeur absolue).

Mais si Robert en a perdu 15 en tout et qu'il en a gagné 9 l'après-midi, cela devient franchement difficile. La majorité des élèves de 12 ans échouent à trouver qu'il en a perdu 15+9 = 24 le matin.



C'est une addition contre-intuitive ! Je veux dire par là que les concepts antérieurement formés ne permettent pas aisément aux élèves de 12 ans de saisir les relations susceptibles de piloter le raisonnement nécessaire au choix de l'addition.

Dans le processus de conceptualisation progressive des structures additives, on peut parfois s'en sortir localement par des glissements de sens et par la formation de concepts dérivés des concepts antérieurement formés : filiation donc ! Mais on peut aussi se trouver dans l'impossibilité d'opérer de tels glissements de sens : rupture donc ! L'une des finalités de la théorie des champs conceptuels est précisément de proposer un cadre pour l'étude des filiations et des ruptures.

La déstabilisation peut être très forte ; la didactique des mathématiques est friande de telles déstabilisations, et cherche les moyens de permettre aux élèves de franchir le cap. On connaît des déstabilisations analogues dans l'histoire des mathématiques, par exemple avec la lente reconnaissance des nombres négatifs, ou dans la comptabilité en partie double avec la difficulté de comprendre ce qu'est un bilan : pourquoi ajoute-t-on au passif le capital, les bénéfices, les amortissements et les provisions ?

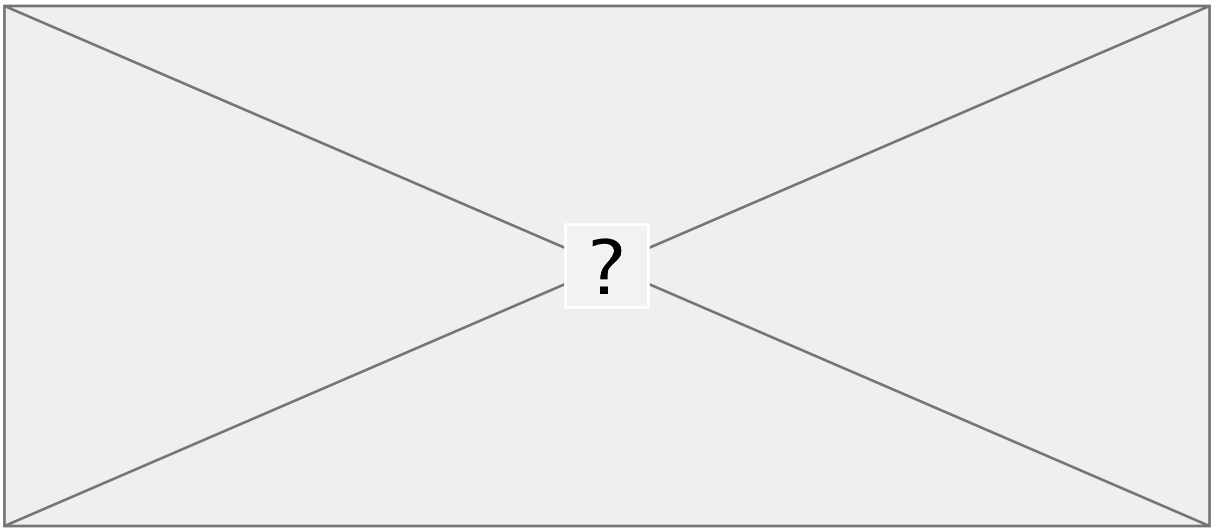
Je prendrai maintenant un second exemple de champ conceptuel : en géométrie, de manière à ne pas répéter l'exemple de la proportionnalité simple et multiple que j'ai souvent présenté. Je me contenterai de dire que, bizarrement, les difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves dans la compréhension des structures multiplicatives sont très différentes de celles rencontrées avec les structures additives. La raison principale est que la relation de base des problèmes de multiplication et de division est une relation à quatre termes et non à trois, et qu'interviennent à la fois des rapports scalaires, sans dimension, relativement faciles à manier, et des quotients de dimensions, beaucoup plus difficiles à extraire, à inverser et à composer.

La géométrie est une discipline scolaire réputée difficile. Pourtant elle s'appuie sur une expérience forte, celle de l'espace. Mais ceci explique peut-être cela, puisque les connaissances intuitives ainsi construites dans l'expérience spatiale ne sont pas nécessairement en bonne correspondance avec les concepts analytiques du géomètre. Notre expérience de l'espace est tridimensionnelle ; la géométrie classiquement enseignée est d'abord bidimensionnelle ; et on ne sait pas aujourd'hui comment faire autrement.

Pierre Greco, et j'en profite pour rendre hommage à sa mémoire, avait l'habitude de dire que l'une des difficultés en géométrie est de coordonner entre elles trois connaissances de l'espace distinctes l'une de l'autre : la géométrie des figures (celle de la famille des quadrilatères par exemple), celle des positions (les coordonnées et les relations d'incidence entre objets géométriques), celle des transformations (rotation, translation, symétrie, projection).

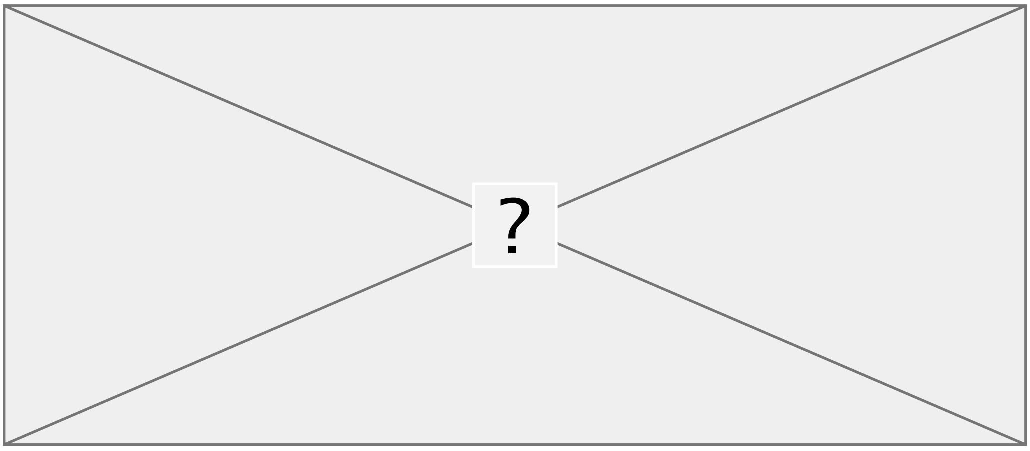
Prenons l’exemple du théorème de Thalès, étudié pour sa thèse par Nathalie Pfaff, il y a déjà plusieurs années. On a des figures : des droites parallèles, des triangles souvent, des intersections en tout cas. On a des positions : des points à l’intersection de deux lignes, un sommet éventuellement, des relations d’équivalence entre positions (être sur la même droite, la même sécante, la même parallèle). On a des transformations : des projections, concrétisées par les parallèles, et des homothéties éventuellement si les sécantes se coupent et qu’ainsi le centre d’homothétie est visible sur le dessin (figure 1) ; il faut parfois raisonner sur les seules projections : les rayons du soleil dans le cas princeps attribué à Thalès de la mesure de la hauteur de la grande pyramide à l’aide de la mesure de l’ombre portée (figure 2).

Figure 1 Figure 2



Les résultats de Nathalie Pfaff montrent que les élèves ont les plus grandes difficultés à utiliser les propriétés du théorème de Thalès lorsque les sécantes ne se coupent pas sur la figure (figure 3) ; même lorsqu’elles se coupent et qu’ils peuvent ainsi utiliser l’homothétie, ils sont très mal à l’aise ; le seul cas vraiment accessible à la majorité des élèves est le cas de la symétrie centrale, qui est un cas d’égalité (figure 4).

Figure 3 Figure 4



C’est un point intéressant de relever que la conceptualisation qui sous-tend le raisonnement et l’action est toujours locale au départ. La classe des cas ainsi compris peut être plus ou moins large. Elle n’est jamais complète d’emblée et il faut des opérations de pensée supplémentaires pour étendre la portée des schèmes ainsi construits.

Venons en donc à ma deuxième thèse

La connaissance est adaptation, nous a enseigné Piaget. Mais qu’est-ce qui s’adapte et à quoi ? Le processus d’assimilation/accommodation est vu par Piaget dans les termes généraux sujet/objet ou sujet/environnement.

Il faut être plus précis. Ce sont les schèmes qui assimilent et accommodent, c’est-à-dire des formes d’organisation de l’activité. Piaget est le père le plus direct de cette idée. Mais curieusement, il n’a pas développé le concept dual du concept de schème, celui de situation. C’est en effet à des situations que le schème s’adapte, et un schème constitué et stabilisé peut être considéré comme une forme invariante d’organisation de l’activité pour une classe de situations donnée.

C’est donc le couple situation-schème qui est au centre du processus de construction, ou encore d’appropriation des compétences et connaissances. L’école est à bien des égards, après la famille, mais de manière plus systématique et plus ambitieuse, une provocation. Et les provocations prennent d’abord la forme de situations.

Dans un champ conceptuel au moins partiellement identifié, il est important d'apprécier l'opportunité de telle ou telle provocation. Il faut un temps pour conforter les schèmes déjà construits, un temps pour les déstabiliser en vue de les enrichir ou de permettre à l'enfant de développer de nouveaux schèmes.

Pour être concret, je vais donner l'exemple d'un schème relativement précoce et de l'extension considérable à laquelle il se prête au cours de l'apprentissage. Il s'agit du schème du dénombrement. Les enfants de cinq ans sont capables de dénombrer de petits ensembles (des personnes dans une pièce, ou des bonbons sur la table) : un, deux trois, quatre…quatre ! Deux concepts mathématiques sont à l'œuvre dans une telle conduite : le concept de correspondance biunivoque et celui de cardinal. Ils ne sont pas explicites. La correspondance biunivoque se manifeste par la règle qu'il faut compter tous les éléments et n'en oublier aucun ; le cardinal par la répétition du dernier mot-nombre prononcé (ou par tout moyen qui permette de souligner qu'il a un statut particulier, le changement de ton par exemple). Ce sont des concepts-en-acte.

Voici maintenant une anecdote, dont je garantis l'authenticité, qui s'est produite au cours de la phase de préparation de la coupe du monde. Les organisateurs recherchaient les stades assez grands pour accueillir un grand nombre de spectateurs. Quelqu'un suggère le stade de Nantes. On téléphone alors au directeur ; celui-ci avoue qu'il ne connaît pas le nombre de places de son stade, et embauche deux vacataires pour procéder au dénombrement. Il leur a fallu deux jours pleins. Le schème qu'ils ont alors mis en œuvre ne pouvait pas rester au niveau de celui de l'enfant de cinq ans : ils ont pu se partager la tâche et recourir ensuite à des additions ; ils ont pu utiliser la numération écrite pour garder la mémoire des nombres et les additionner ; ils ont pu se simplifier la tâche, dans les parties rectangulaires, en multipliant par le nombre de rangées le nombre de places par rangée ; ils ont même pu recourir, pour les angles du stade, à la formule qui permet de calculer le nombre moyen de places par rangée (maxi plus mini, divisé par deux).

Dans cette activité coopérative, d'autres schèmes ont nécessairement été convoqués : pour organiser le travail, pour contrôler, etc. On peut imaginer par exemple nos deux vacataires en train de discuter dans un coin du stade pour discuter le bien fondé de telle ou telle manière de procéder, ou pour contrôler la cohérence des résultats.

Ils auront alors mis en œuvre des schèmes de dialogue et d'argumentation, avec des aspects inévitablement affectifs puisque l'affectivité est omniprésente dans l'activité (gestes, mimiques, énoncés relevant de la séduction ou de l'autorité etc).
Le concept de schème est central pour tous les registres de l'activité : gestes, raisonnements scientifiques et techniques, interactions sociales et affectives, dialogues et autres productions du sujet.

Il faut donc s'expliquer un peu plus sur le concept de schème et en donner une définition.
Le schème est un universel puisqu'il s'adresse à une classe de situations et qu'il engendre une classe de conduites distinctes, adaptées aux situations particulières rencontrées. Ce qui est invariant c'est l'organisation, non l'activité. Cette dernière est flexible et dépend des valeurs des variables de situations, qui sont contingentes pour l'élève, alors que le maître les a choisies intentionnellement, en connaissance de cause. Le schème est une unité fonctionnelle : ses composantes ne sont pas à elles seules fonctionnelles, mais il n'en est pas moins intéressant de les analyser, et de distinguer quatre catégories de composantes, toutes indispensables.

- Les buts, sous-buts et anticipations qui forment la partie intentionnelle et motivationnelle du schème.
- Les règles d'action, de prise d'information et de contrôle, qui engendrent l'activité au fur et à mesure.
- les invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) qui permettent de sélectionner les objets et les relations pertinentes et d'engendrer règles et buts à partir de cette information.
- les possibilités d'inférence, qui sont elles aussi constitutives de l'activité en situation, puisqu'il y a toujours un grand nombre d'inférences *hic et nunc.*

Prenons l'exemple de la compréhension de texte. Que lit-on ? dans quel ordre et avec quelle attention sélective ? que relit-on ? avec quelles questions ? Pour interpréter les données

textuelles il faut une certaine conception de ce qu'est une narration, une explication, une argumentation, ou un texte de problème.
Parmi les exercices de géométrie que nous avons élaborés dans le Moniteur de Mathématiques publié par Nathan, dont la fonction est de permettre aux enseignants d'évaluer les compétences des élèves des trois dernières années de l'école élémentaire, on trouve des exercices dans lesquels il faut produire un dessin à partir d'un texte, formé d'instructions et d'informations, et réciproquement des exercices dans lesquels il faut reconstituer un scénario possible pour la construction d'une figure (comportant par exemple un carré et un cercle, des diagonales, des rotations).
La perspective constructiviste est indispensable pour analyser le déroulement de l'activité, dans les deux sens ; elle porte directement sur les schèmes de production, en situation, soit d'un énoncé soit d'une figure géométrique (avec les instruments usuels que sont la règle, l'équerre, le compas, ou avec les instruments d'un logiciel comme Cabri géomètre par exemple).
Or la perspective constructive ne concerne pas que le court terme de l'activité de construction mais aussi le long terme du développement cognitif, sur des durées beaucoup plus longues, comme c'est le cas chez les grands experts professionnels de la conception ou de la maintenance dans l'industrie, chez les grands médecins, les grands avocats, les grands scientifiques ou les artistes.
De la même manière, l'histoire des mathématiques est jalonnée de constructions et de « déconstructions » comme on dit aujourd'hui. Il est intéressant d'essayer d'avancer dans l'analyse de ce processus afin de mieux saisir plus loin, pour terminer, les raisons pour lesquelles il est si facile d'adopter sans trop réfléchir une posture platonicienne ou empiriste.

Ma troisième thèse est donc que les situations susceptibles de déstabiliser les schèmes et les conceptions des élèves sont des situations qui résultent de la culture : de la culture de la société tout entière, et de la culture de l'école en particulier. Cette dernière n'est pas totalement au diapason de la marche de la société. Sur certains points, elle est décalée et résulte d'un processus social de transposition, dont il existe des exemples spectaculaires en mathématiques, comme Chevallard et quelques autres chercheurs l'ont mis en évidence.

Il est nécessaire aussi d'aborder, même brièvement, le problème du langage et des outils symboliques. Vygotski accordait au langage une importance décisive dans l'enseignement et l'apprentissage des concepts scientifiques, importance à l'évidence sous-estimée par Piaget. Pourtant Piaget était d'accord au fond avec Vygotski qu'un concept n'était pas pleinement un concept tant qu'il n'était pas formulé. Tous deux étaient d'accord aussi que le processus de conceptualisation n'était pas pleinement circonscrit par les formes langagières. Comment peut-on reprendre ce problème aujourd'hui ?

Il est impossible de contourner l'idée que le lexique et les formes syntaxiques contribuent fortement à la stabilisation et à la reconnaissance des invariants opératoires. Mais il faut en même temps prendre la mesure que la source de la conceptualisation est d'abord dans l'action et la perception, c'est-à-dire dans les schèmes.

C'est parce qu'il identifie des objets, des propriétés, des relations, des transformations, des actions dans le monde, que l'enfant peut apprendre à parler. Très vite le langage peut avoir un effet en retour sur ce processus d'identification, mais le langage ne peut pas être premier. Les symboles mathématiques non plus ne sont pas premiers, et il faut donc, pour comprendre la place du langage dans la communication et la conceptualisation, faire appel non seulement à la théorie saussurienne de la langue comme système de signifiants/signifiés, mais aussi à la théorie des schèmes et des invariants opératoires.

L'analyse de certaines formes prédicatives va permettre de pousser l'analyse un peu plus loin concernant la perspective constructiviste.

Partons d'abord de la forme opératoire de la connaissance ; il existe à l'évidence une différence notable de complexité entre les schèmes qui permettent de dessiner la partie symétrique de la demi-forteresse (figure 5) et ceux nécessaires pour dessiner le triangle symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d (figure 6). N'en disons pas plus ici, et intéressons-nous plutôt aux quatre énoncés susceptibles d'être prononcés par l'enseignant, éventuellement par les élèves.

Figure 5 Figure 6

- La forteresse est symétrique.
- Le triangle A' B' C' est symétrique du triangle ABC par rapport à d.
- La symétrie conserve les longueurs et les angles.
- La symétrie est une isométrie.

La perception de la forteresse peut conduire à la formulation d'un énoncé vrai, qui consiste ici en l'attribution à la forteresse de la propriété d'être symétrique. La formulation devient déjà plus complexe dans l'énoncé 2. Dans le troisième énoncé, le concept-prédicat symétrique est devenu un concept-objet, qui se traduit par une opération linguistique de nominalisation. Ce nouvel objet est un objet abstrait, totalement construit, qui n'en a pas moins des propriétés à son tour. Cela n'est possible justement, que parce qu'il a été construit comme objet. Et ce sont les propriétés de conservation de ce nouvel objet qui donnent lieu à la construction d'un nouvel objet de pensée, l'isométrie (là encore grâce à une opération de nominalisation)

On n'arrête pas le mouvement de conceptualisation. A l'évidence le langage permet des constructions qu'il serait bien difficile de faire avec les invariants opératoires non formulés qui permettent d'organiser l'action.

En résumé, les formes prédicatives de la connaissance résultent elles-mêmes de constructions, mais les formes opératoires, qui permettent d'agir et de réussir, s'appuient sur des conceptualisations qui restent pour une part totalement implicites, et même inconscientes pour certaines d'entre elles. Ces conceptualisations vont donc au-delà de ce que les langues et les autres formes symboliques peuvent exprimer.

À l'inverse le langage permet de construire de nouveaux objets qui ne correspondent pas directement à des perceptions, et qui prennent pourtant place dans des formes prédicatives parfaitement reçues dans une culture donnée. En fait elles sont reçues par ceux qui partagent le système de la langue. Ce n'est évidemment pas le cas des enfants, notamment pour le lexique scientifique et les formes syntaxiques complexes.

C'est le système d'invariants opératoires (et donc de schèmes) de chacun de nous qui doit être mis en relation avec les signifiés de la langue utilisés dans la communication. Les mots à eux seuls ne sont pas des concepts. Ils ne le deviennent que lorsqu'ils prennent appui sur l'action et l'expérience individuelle des sujets.

En conclusion, et à partir de ces considérations, on peut dire que le concept de représentation recouvre quatre sens complémentaires :

1- Le flux de la conscience, dont nous avons tous l'expérience, mais qui peut correspondre aussi bien à l'imagination qu'à la perception. La perception est représentation, et l'identification perceptive des objets et de leurs propriétés est évidemment essentielle dans notre conception de la représentation. Lorsque Piaget écrit *la formation du symbole*, il s'intéresse plutôt à l'imagination ; et il insiste sur quelques-uns des critères qui selon lui font que l'imitation implique la représentation : l'imitation différée dans le temps, l'imitation d'un geste jusque-là absent du répertoire du bébé, le jeu de faire semblant (qui implique l'évocation des objets en leur absence).
Il faut aller plus loin. La construction d'objets imaginaires ne relève pas que du rêve et de la fantaisie poétique, elle est aussi un ressort fondamental de la construction scientifique. Personne n'a jamais vu les forces d'interaction et les orbites entre planètes, ni les espaces vectoriels, ni même le nombre quatre. Tous ces concepts sont des constructions.

2- le deuxième sens du terme « représentation » concerne **le système de catégories** (classes d'objets, propriétés, relations, transformations et processus) **et de théorèmes-en-acte** qui permet de lire et d'interpréter les phénomènes du monde, en premier lieu ceux qui résultent de l'activité du sujet. C'est là que se situent les invariants opératoires.

3- Le troisième sens concerne **les systèmes de signifiants/signifiés** (en premier lieu le langage naturel), qui permettent d'expliciter dans des formes prédicatives les relations entre les objets du monde , et de communiquer à leur propos.

4- Le dernier sens enfin, essentiel à mes yeux, est celui de **système de schèmes** (hiérarchiquement organisé), qui seul donne de la représentation une conception dynamique et fonctionnelle. Ce système est ouvert à d'infinies possibilités de décombinaison, de recombinaison et de découverte.

La représentation n'est ni un dictionnaire ni une bibliothèque ; c'est un répertoire de schèmes actifs, ouvert à la contingence des situations rencontrées.

Mon dernier point sera pour dire que les objets, une fois posés, ne peuvent pas être considérés comme de pures constructions hypothétiques. Le processus de réification (ou de chosification) traverse tout l'édifice cognitif. Une fois posée, la conservation des quantités discrètes va de soi ; l'évidence a changé de camp. La conservation est réifiée. Il en va de même pour l'objet permanent, pour le nombre quatre, ou pour le concept de fonction, qui n'a été explicité que tardivement au cours de l'histoire des mathématiques.
Au fond, il est naturel d'être platonicien quand on est mathématicien, tant les objets mathématiques sont ligotés par des liens de nécessité avec tout un système de concepts dont l'opérationnalité n'est plus à démontrer. Le poids de la perception dans la construction de l'évidence n'alimente pas que l'empirisme, qui est au fond, une généralisation de l'idée de lecture directe des propriétés du réel ; il alimente aussi le réalisme idéaliste de Platon et des mathématiciens. On finit par croire à l'existence de ce qu'on a achevé de construire. Tout constructivistes que nous soyons, ne pensons-nous pas que le nombre quatre est un objet de pensée légitime, de toute éternité ; et qu'après tout il est bien commode d'oublier que la lettre x représente une inconnue ou une variable, et de la traiter dans un calcul littéral comme un objet matériel : 2x plus 3x, ça fait 5x, tout comme 2 billes plus 3 billes, ça fait 5 billes.