# Psychologie et didactique : quels enseignements théoriques et méthodologiques pour la recherche en psychologie ?

## In Colloque Clermont-Ferrand

1987 (mars)
Clermont-Ferrand, France

Lien internet permanent pour l’article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1987_Enseignements-Theoriques_Colloque-Clermont-Ferrand

LA PSYCHOLOGIE SCIENTIFIQUE ET SES APPLICATIONS

Colloque de Clermont-Ferrand des 26-27-28 Mars 1987

---

# Psychologie et didactique : quels enseignements théoriques et méthodologiques pour la recherche en psychologie

---

Gérard VERGNAUD, CNRS, Paris

La psychologie n'est pas développée aujourd'hui, au point qu'elle puisse se désintéresser des phénomènes psychologiques les plus importants, et qu'elle n'a pas encore repérés. Or beaucoup de ces phénomènes sont complexes. Au lieu d'essayer de les réduire à toutes forces à quelques processus simples, et de rechercher par voie de conséquence les faits susceptibles d'entrer le plus aidément dans le cadre des théories existantes, il est préférable d'étudier et d'analyser ces phénomènes complexes et de s'obliger ainsi à développer des théories plus riches.

Paradoxalement, c'est en étudiant des compétences complexes, dont l'apprentissage s'inscrit nécessairement dans la longue durée, qu'on peut le mieux comprendre ce qu'est la connaissance.

Piaget disait à juste titre (malheureusement peu de psychologues ont compris cette leçon) que, <u>pour comprendre la connaissance, il fallait en analyser le développement</u> : d'où le projet scientifique de l'épistémologie génétique. Aujourd'hui je me permettrai d'ajouter que, <u>pour comprendre la connaissance, il faut la transformer</u> : d'où la thèse que la recherche en didactique est aujourd'hui une nécessité pour qui s'intéresse aux apprentissages cognitifs complexes. Plusieurs éléments théoriques me paraissent indispensables :

- ceux de schème et de concept,
- la distinction entre signifié et signifiant,
- les concepts de théorème-en-acte (plus généralement de connaissance-en-acte) et de champ conceptuel.

Qu'est-ce qu'un schème ?

C'est Piaget qui a introduit ce concept en psychologie, en l'empruntant à Kant, et en lui donnant comme contenu principal l'idée d'une totalité dynamique organisatrice de l'action, ayant une certaine plasticité, susceptible de fonctionner pour des valeurs différentes des variables de situation, et susceptible également d'évoluer en fonction des situations nouvelles rencontrées. Pour Piaget cette totalité dynamique est censée faire pièce aux totalités que la Gestalt avait mises en évidence, principalement d'ordre perceptif. Il me paraît nécessaire aujourd'hui, pour avancer, de reprendre ce concept de totalité dynamique et d'essayer d'en dégager les différents éléments constitutifs, sans pour autant remettre en cause leur caractère intégré.

Pour fonctionner, un schème paraît devoir comporter quatre types d'éléments : des invariants, des inférences, des règles d'action, des anticipations. Les éléments le plus facilement identifiables dans les études qui analysent les suites d'actions produites par des sujets, sont les "règles d'action", plus précisément, "les règles de production des actions du sujet" (Vergnaud, 1968). Mais ces règles reposent sur une connaissance implicite du réel, les invariants opératoires, et c'est par la composition de ces invariants entre eux et avec les informations tirées du réel que reposent, par inférence, les règles d'action et les anticipations. Sans invariants opératoires, le sujet serait dans l'incapacité de sélectionner les informations pertinentes et de générer des actions efficaces.

Or le discours théorique n'est pas le même pour décrire les règles d'action et pour décrire les invariants opératoires. Les analyses cognitives en termes de règles ne disent rien sur le processus d'identification des objets du réel. Les invariants opératoires, eux, doivent être décrits en termes d'objets, de propriétés, de relations, de transformations... c'est-à-dire dans des termes qui s'apparentent à ceux qu'on utilise pour analyser des conceptions. Reconnaître le rôle cognitif essentiel des invariants opératoires dans les schèmes, c'est poser le problème de la conceptualisation du réel, et c'est aussi poser l'existence d'une connaissance-en-acte. Pour les mathématiques, on parlera de théorèmes-en-acte, c'est-à-dire de propositions mathématiques implicitement tenues pour vraies sur le réel.

## Qu'est-ce qu'un concept ?

On ne peut raisonnablement pas faire de psychologie des activités cognitives complexes sans savoir ce qu'est un concept. Encore faut-il en avoir une idée assez complète pour comprendre comment un concept peut se former et prendre ses significations, comment il peut être exprimé (car il n'y a pas de concept sans moyen de le désigner et d'en débattre), et de quels ingrédients il est composé.

Je définis un concept comme un triplet de trois ensembles

$$\text{Concept} = (S, I, \mathcal{S})$$

$S$ = ensemble des situations qui donnent du sens au concept.
$I$ = ensemble des invariants opératoires associés au concept.
$\mathcal{S}$ = ensemble des signifiants (représentations symboliques) langagières et non langagières, permettant de représenter le concept, ses propriétés, et les situations qu'il permet de penser.

Pourquoi "ensemble de situations" ? Parce qu'il n'existe pas de concept qui prenne sa signification dans un seul type de situations. Pour le concept de nombre par exemple, la variété et la richesse des situations de référence est considérable ; qu'il s'agisse des situations de comparaison et de dénombrement, des situations d'addition et de soustraction, ou des situations impliquant d'autres relations et opérations. Le problème de l'appropriation du concept de nombre a de nombreuses facettes. Pour chacune de ces facettes, il existe des problèmes cognitifs spécifiques ; à chaque niveau, ce sont des difficultés différentes que doivent surmonter les élèves.

Pourquoi "ensemble d'invariants opératoires" ? Justement parce que les compétences de niveau différent qui jalonnent l'apprentissage d'un concept par l'enfant, reposent sur des invariants distincts, dont certains peuvent bien entendu englober les précédents, mais pas nécessairement tous. En d'autres termes les invariants sont des objets, des propriétés, des relations ou des théorèmes, reconnus comme tels dans l'action. Nous illustrerons ce point par des exemples plus loin.

Pourquoi "ensemble de signifiants" ? Parce que, à côté du langage naturel, qui occupe bien entendu une place primordiale dans le développement et le fonctionnement de la pensée, il existe d'autres représentations symboliques, notamment dans les disciplines scientifiques. Pour étudier l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques par exemple, on est amené à s'intéresser à plusieurs autres systèmes sémiotiques, et peut-être même à s'inspirer de certains phénomènes associés à ces systèmes pour comprendre en retour certains phénomènes langagiers.

## Etudier des champs conceptuels

Cette définition du concept conduit à se donner comme objets d'étude des champs conceptuels, c'est-à-dire des ensembles assez vastes de situations et de concepts : on n'a pas les moyens de comprendre les filiations et les ruptures dans la conceptualisation du réel, si on ne considère pas de tels ensembles ; il faut en effet comprendre comment l'enfant forme ses premières conceptions et compétences, et comment d'autres situations l'obligent soit à étendre le champ de ses conceptions et compétences, soit au contraire à en circonscrire la portée. Dans la formation des connaissances, il y a des moments d'addition, des moments de concaténation et de composition, des moments de contradiction. La psychologie cognitive doit prendre cela en compte.

Cette idée de champ conceptuel, est assez facilement acceptée pour la physique, la biologie ou l'économie ; beaucoup moins pour les mathématiques, dont on a tendance à considérer qu'il s'agit d'une science du général, indépendante des contenus. Les travaux qui ont été faits sur l'apprentissage de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre et de l'analyse montrent que les mathématiques aussi sont organisées en champs conceptuels. Même la logique peut être considérée de ce point de vue : on peut par exemple identifier des critères différenciés de compréhension du concept de classe :

- tenir compte de deux propriétés à la fois dans le choix d'un objet,
- classer un ensemble d'objets dans un tableau croisé en tenant compte de deux critères à la fois,
- théorème de la quantification de l'inclusion

$$A \subset B \Longrightarrow \text{card}(A) < \text{card}(B)$$

- lois de Morgan sur le complément de l'intersection et de l'union :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- théorème des cardinaux de l'union et de l'intersection :

$$\text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Autant de critères différents qui montrent, qu'entre l'âge de 3 ans et l'âge de 12 ans (et au-delà), la logique des classes est une construction laborieuse, dont le contenu conceptuel mérite une analyse approfondie et détaillée.

<u>Théorèmes-en-acte : quelques exemples dans le champ conceptuel des structures multiplicatives</u>

Voici quelques exemples d'une multiplication simple (4 x 5 ou 5 x 4) qui montrent que les théorèmes qui permettent de rendre compte du choix par un enfant de l'opération de multiplication peuvent être très différents.

-"Un gâteau coûte 4 francs, combien coûtent 5 gâteaux ?"

Si l'enfant déclare "5 fois 4 francs" ou effectue l'opération correspondante, le "5 fois" exprime simplement l'idée que 5 gâteaux, c'est 5 fois un gâteau, et que le prix de 5 gâteaux est donc 5 fois plus grand que celui d'un gâteau.

Si par contre l'enfant part de 5 gâteaux et multiplie cette quantité par le prix unitaire 4 francs par gâteau, il utilise l'idée d'un coefficient constant entre la variable nombre de gâteaux et la variable prix à payer. S'il obtient des francs, c'est parce que la dimension gâteau apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur et se trouve ainsi éliminée, comme le montre l'équation aux dimensions ci-dessous :

$$5 \text{ gâteaux} \times \frac{4 \text{ francs}}{1 \text{ gâteau}} = \ldots \text{ francs.}$$

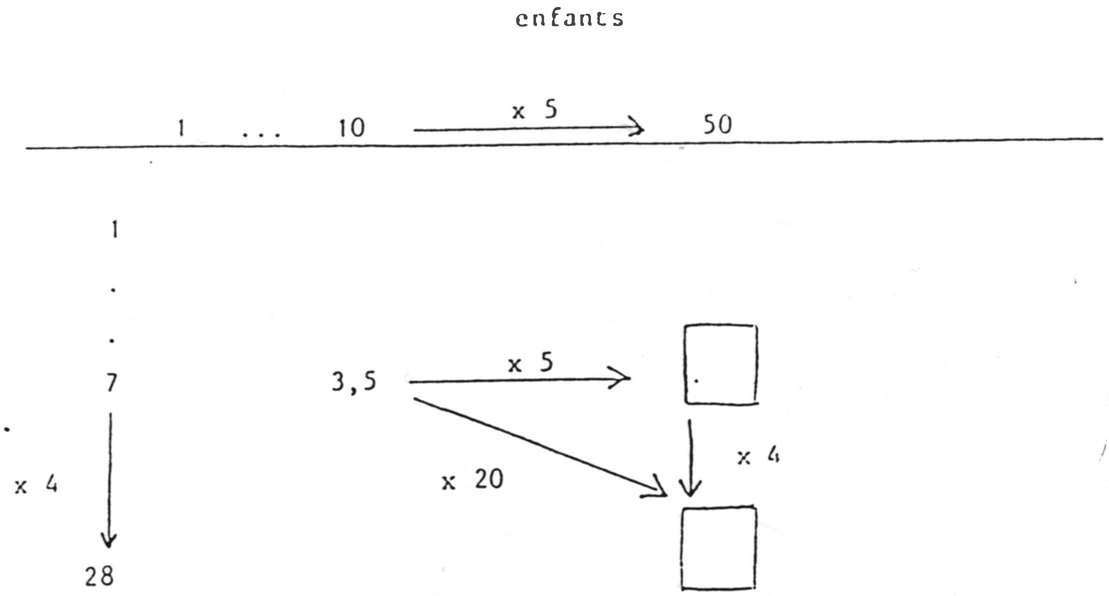
La multiplication par 4 représente donc un quotient francs par gâteau, alors que, dans la première procédure, la multiplication par 5 représente le rapport entre deux nombres de gâteaux, c'est-à-dire entre deux grandeurs de même nature. Ce n'estpas un quotient de dimensions, mais un scalaire : nombre sans dimension.

- La démonstration est également claire avec l'exemple suivant :
"6 gâteaux coûtent 4 francs, combien coûtent 30 gâteaux ?"
L'enfant qui déclare "5 fois 4 francs" fait un raisonnement scalaire puisqu'il utilise le rapport entre 30 gâteaux et 6 gâteaux.

- Prenons maintenant un exemple plus compliqué comme celui-ci :
"Des enfants partent en colonie de vacances. Le séjour doit durée 28 jours et il y a 50 enfants. En se renseignant dans un livre, ils apprennent qu'il faut prévoir environ 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants. Combien de sucre doivent-ils prévoir d'acheter pour la colonie ?"

Supposons qu'un bon élève de CM2 produise la solution suivante :
5 fois 4... 20. 20 fois 3,5 kg de sucre.

On peut exprimer le calcul relationnel de l'enfant dans le tableau suivant :




5 fois plus d'enfants, 4 fois plus de temps ⇒ 20 fois plus de sucre.

La variable "consommation de sucre" dépend linéairement de deux autres variables, indépendantes entre elles : le nombre d'enfants et la durée du séjour.

- Prenons un autre exemple :

"Quelle est l'aire d'une chambre qui fait 5 m de long et 4 m de large ?"
Réponse : 5 fois 4... 20.

Expliquons maintenant les différents théorèmes en jeu :

$f\ (5 \times 1) = 5 \times f\ (1)$ le prix de 5 gâteaux (5 fois 1 gâteau) est 5 fois le prix d'un gâteau.

Ce raisonnement s'appuie sur un théorème qu'on retrouve avec l'exemple des 30 gâteaux

$f\ (5 \times 6) = 5 \times f\ (6)$ le prix de 30 gâteaux (5 fois 6 gâteaux) est 5 fois le prix de 6 gâteaux.

Plus généralement

(I) $f\ (\lambda x) = \lambda f(x)$

C'est un théorème qui exprime l'une des propriétés les plus utilisées de la fonction linéaire : l'isomorphisme pour la multiplication par un scalaire.

La procédure qui consiste à partir du nombre de gâteaux et à multiplier par un coefficient constant (le prix unitaire 4 francs par gâteau), exprime une autre propriété de la fonction linéaire, qui s'écrit :

$$(2)\ f(x) = ax$$

le prix de x gâteaux est égal au produit du nombre de gâteaux x par le prix unitaire a.

On peut considérer que cette caractérisation mathématique est excessivement sophistiquée pour exprimer le raisonnement des enfants. Mais il est important d'une part de caractériser correctement leurs opérations de pensée, d'autre part de s'appuyer dans l'enseignement sur la reconnaissance spontanée de ces relations par les enfants, pour un domaine de grandeurs familières et pour des valeurs numériques simples, afin d'étendre la validité des raisonnements considérés, à des domaines moins familiers et à des valeurs numériques quelconques :

- vitesse, masse volumique...
- grands nombres, rapports fractionnaires, nombres décimaux.

Dans le problème de la colonie de vacances, le raisonnement de l'enfant repose sur un raisonnement un peu plus complexe, puisqu'il y a trois variables en jeu, dont l'une dépend linéairement des deux autres, indépendantes entre elles. Voici une écriture sophistiquée de ce théorème :

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, x_2)$$

mais on peut l'énoncer sous une forme facile à saisir avec l'exemple de la consommation de sucre

$$C(5 \times 10, 4 \times 7) = 5 \times 4\ C(10, 7)$$

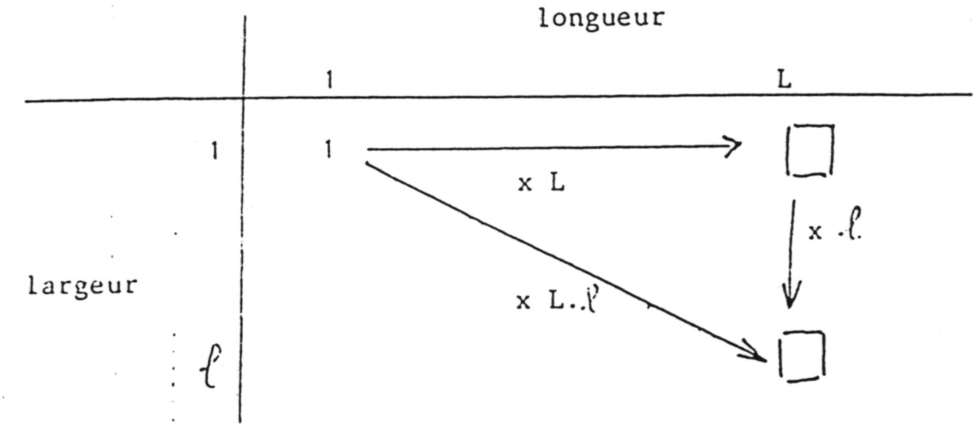
La consommation de 5 fois 10 enfants pendant 4 fois 7 jours, est 5 fois 4 fois (20 fois) la consommation de 10 enfants pendant 7 jours.

En général l'élève de CM2 qui choisit les bonnes opérations n'exprime pas ce théorème, mais l'inférence "5 fois 4 fois plus $\Longrightarrow$ 20 fois plus" ne peut être comprise sans ce théorème-en-acte.

L'enseignant peut s'appuyer sur ce raisonnement intuitif de l'enfant pour en analyser avec lui les caractéristiques, éventuellement par le biais d'une représentation en tableau comme celle que j'ai présentée plus haut, de manière à donner à cette inférence un statut plus explicite, et en même temps plus objectif, qui permettra à l'enfant d'en étendre la portée.

Le concept de théorème-en-acte permet d'analyser l'intuition. Cette analyse permet la transformation de l'intuition en connaissance explicite.

Dans le calcul de l'aire de la chambre, l'opération 5 x 4 représente le produit de la longueur par la largeur. En réalité l'aire n'est le produit longueur x largeur que parce qu'on a choisi les unités d'aire et de longueur de telle manière qu'un carré de côté 1 a une aire égale à 1. La formule de l'aire du rectangle s'appuie en fait sur le même raisonnement que celui qui précède :




Le rectangle L fois plus long et $\ell$ fois plus large que l'unité a une aire L x $\ell$ fois plus grande.

Le raisonnement apparemment sophistiqué vu plus haut est en fait la clef du concept et la clef de la formule, comme nous le verrons plus loin.

Prenons d'autres exemples

"Monsieur Dupont a deux aquariums, un grand dans son salon et un petit dans sa cuisine. Celui du salon est 2 fois plus long, 3 fois plus large et 2 fois plus profond que celui de la cuisine. Combien de fois celui du salon est-il plus grand que celui de la cuisine ?"

Considérons deux bonnes réponses, parmi plusieurs autres possibles

La première consiste dans l'inférence : "2 fois 3 fois 2 fois $\Rightarrow$ 12 fois plus grand". C'est le raisonnement déjà vu

$$f(2L, 3\ell, 2h) = 2 \times 3 \times 2\, f(L, \ell, h)$$

La deuxième consiste à paver mentalement le grand aquarium à l'aide du petit : "2 dans la longueur, 3 dans la largeur, ça fait 6 ; puis encore 2 dans la hauteur, ça fait 12".

Ce deuxième raisonnement repose sur une conception unidimensionnelle du volume, qui ne considère que des rapports entre volumes ; alors que le premier raisonnement repose sur la relation multiplicative entre le rapport des volumes et les rapports des différentes longueurs entre elles. Une conception tridimensionnelle du volume est nécessaire pour le premier raisonnement, pas pour le second. Or la puissance des deux conceptions est inégale. Pour le voir, il suffit de changer les valeurs des variables, par exemple : 1,8 plus long, 2,5 fois plus large, et 0,8 fois plus profond ; la conception tridimensionnelle permet la résolution, alors que la conception unidimensionnelle ne la permet plus.

La construction du concept de volume passe par beaucoup d'étapes, à partir d'une conception purement unidimensionnelle comme celle qui est impliquée dans la mesure des récipients, et qui a du sens dès le début de l'école élémentaire : comparaison de quantités de liquides et de récipients, addition et soustraction de mesures, etc.

Par contre, les formules du parallélépipède rectangle, du prisme et de la pyramide mettent théoriquement en jeu une conception tridimensionnelle. Mais les enfants qui appliquent la formule n'ont pas nécessairement une telle conception, que d'ailleurs les manuels et les enseignants ne mettent pas toujours en évidence. On trouve des raisonnements tridimensionnels dans des problèmes qui ne font pas appel aux formules, comme dans le problème ci-dessus des deux aquariums, et en même temps les conceptions unidimensionnelles continuent d'avoir leur pertinence dans de nombreuses situations.

Devant une tâche inhabituelle et relativement complexe, les enfants peuvent recourir à tout l'arsenal des schèmes dont ils disposaient auparavant et ils essayent tant bien que mal de les appliquer. Si on veut comprendre comment un sujet fonctionne devant une situation nouvelle, il faut donc connaître les différents chemins du développement cognitif.

Cette remarque permet de récuser le paradigme simpliste de la comparaison novice/expert, puisque ce ne sont pas deux étapes, initiale et finale, qui permettent de regarder comment un sujet fonctionne en situation, mais toutes les étapes qui jalonnent l'apprentissage et le développement.

Si un certain tableau du développement est nécessaire pour comprendre le fonctionnement, on ne peut pas non plus comprendre le développement si on n'étudie pas le fonctionnement en situation nouvelle, c'est-à-dire dans des conditions où le sujet est conduit à modifier ses connaissances pratiques et théoriques antérieures, éventuellement avec l'aide d'autrui.

L'utilisation de signifiants langagiers, graphiques ou algébriques est une aide à la pensée et à l'apprentissage. Mais nous allons voir que cette utilisation soulève elle-même des problèmes cognitifs spécifiques. Soit l'expression multiplicative :

$$y = ax$$

il y a plusieurs lectures possibles d'une telle formule :

- soit comme un moyen de calculer y quand on connaît x : y est alors l'inconnu, x le connu (à supposer qu'on connaisse a en tout état de cause) ;
- soit comme le lien entre une fonction y et une variable x : les deux lettres ont alors un statut très différent ;
- soit comme une relation constante (coefficient a) entre deux variables x et y.

Pour une formule comme celle du volume du prisme, on peut identifier plusieurs niveaux de lecture

$$V = AH$$

- pour calculer le volume V, il faut connaître l'aire de base A et la hauteur H et le multiplier l'une par l'autre ;
- pour calculer l'aire de base, il faut diviser le volume par la hauteur.

Cette utilisation inverse de la formule constitue déjà une lecture différente de la première. Souvent les manuels de cinquième se contentent de ces deux lectures ;

- le volume est proportionnel à l'aire de base quand la hauteur est constante, et proportionnel à la hauteur quand l'aire de base est constante.

Pour faire cette lecture il faut considérer le volume, l'aire de base et la hauteur comme des variables, y compris dans la partie de l'énoncé qui fait référence à l'idée de constante. Faire référence à la constance de la hauteur, c'est signifier qu'elle pourrait être variable.

Cette lecture est rarement faite par les élèves ; on la trouve d'ailleurs peu représentée dans les manuels.

Or c'est cette lecture qui constitue la raison fondamentale de la formule : le produit AH n'est autorisé que par le caractère indépendant des variables A et H, et la proportionalité de V par rapport à chacune d'entre elles, quand l'autre est tenue constante.

L'algèbre : quelques autres problèmes de conceptualisation

Il est naturel d'enchaîner, à partir de ce dernier exemple, sur la question de l'apprentissage de l'algèbre. La première question qui se pose, dans la perspective d'une meilleure relation entre psychologie cognitive et épistémologie des mathématiques, est d'identifier les besoins pratiques et théoriques auxquels peut répondre l'algèbre. Pour la population d'élèves faibles avec lesquels nous avons travaillé (élèves de 4ème et de 3ème de LEP), cette question n'est pas subalterne : en effet il s'agit de les intéresser à l'algèbre en leur en montrant la fonction et la puissance, non pas de leur présenter comme c'est trop souvent le cas dans l'enseignement actuel de l'algèbre, un jeu symbolique portant sur des objets mathématiques tout constitués (équation, inconnue, égalité, fonction, variable, solution...).

Nous avons fait le choix d'introduire l'algèbre comme un outil, permettant de résoudre des problèmes d'arithmétique énoncés en langage naturel, que les élèves seraient incapables de résoudre par le seul moyen de l'arithmétique. Cette approche pose évidemment le problème de la rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre. Voici quelques éléments constitutifs de cette rupture.

L'arithmétique consiste à rechercher des inconnues intermédiaires, à choisir de manière intuitive les données et les opérations permettant de calculer ces inconnues intermédiaires, à faire ces choix dans un ordre convenable, qui permet de contrôler le sens de la suite des opérations effectuées.

La solution algébrique d'un problème d'arithmétique passe par un tout autre chemin : l'extraction et le choix des relations pertinentes entre inconnues et données, l'écriture formelle de ces relations, le traitement quasi-automatique de ces expressions formelles. Au contrôle par le sens de la suite des opérations, se substitue un contrôle plus abstrait par la nécessité des règles de manipulation des signifiants algébriques et par l'adéquation de la modélisation initiale (mise en équation). Pour préciser ce point, remarquons que certaines fonctions qui apparaissent d'un côté de l'équation, à un moment ou à un autre du processus de résolution, n'ont pas de sens physique.

On ne voit pas pourquoi les élèves accepteraient aisément ce détour formel qu'est l'algèbre, d'autant que les premières solutions algébriques concernent souvent des problèmes que les enfants sauraient résoudre par l'arithmétique.

Désignons par <u>script-algorithme</u> le schème de résolution d'une équation. Voici un exemple

$$4t + 5 = 58$$
$$4t + 5 - 5 = 58 - 5$$
$$4t = 53$$
$$4t/4 = 53/4$$
$$t = 53/4$$
$$t = 13{,}25$$

Cet exemple est en fait un prototype du schème de résolution de toutes les équations de type $ax + b = c$, que $ax + b$ soit à gauche ou à droite du signe d'égalité, que l'inconnue soit désignée par $x$, par $y$, par $t$ ou par toute autre lettre (pourvu que $c$ soit plus grand que $b$ et que $a$ soit positif, de manière à rester dans le domaine des solutions positives).

Désigner ce schème de résolution par l'expression "script-algorithme", c'est désigner délibérément son caractère composite :

- script au plan du signifiant, c'est une forme qui a certaines propriétés et qui possède notamment certains invariants de forme sur l'ensemble des variations associées au choix des données numériques, au choix de la lettre et de sa position. Le même script s'applique à des expressions diverses, pourvu que soit reconnue l'identité de leur forme.

$$2 + 5y = 27 \qquad\qquad 43 = 7x + 8$$

- algorithme au plan du signifié, c'est une suite d'opérations qui s'appuie sur des connaissances mathématiques identifiables, par exemple sur la conservation de l'égalité lorsqu'on soustrait un même nombre de chaque côté de l'égalité.

On retrouve ainsi au niveau de l'algèbre élémentaire, un exemple de schème qui associe étroitement signifiants et signifiés, comme le fait pour l'enfant de 5 ans le schème du dénombrement.

Le schème du dénombrement coordonne en effet des éléments divers : la correspondance entre la suite des objets à dénombrer, celle des gestes du doigt, celle des mouvements des yeux, et celle des mots-nombres prononcés dans l'ordre "un, deux, trois, quatre" ; la cardinalisation de l'ensemble des objets, qui se traduit souvent par le fait que l'enfant prononce deux fois le mot "quatre", une première fois pour désigner le 4ème élément, une deuxième fois pour désigner le cardinal de l'ensemble. Le schème du dénombrement repose ainsi sur la maîtrise de certaines activités sensori-motrices complexes et sur une conceptualisation du réel en termes d'ensemble, d'énumération exhaustive et non répétitive, d'ordre et de cardinal.

Les connaissances mathématiques opératoires, si l'on entend par le terme "opératoires" le fait qu'elles fonctionnent efficacement, sont constituées de schèmes composites, c'est-à-dire impliquant des opérations à la fois au plan du signifié et au plan du signifiant. Un objectif intéressant pour la recherche en psychologie est de repérer ces schèmes, et de s'attacher à le faire pour une grande diversité de situations ; au lieu de s'en tenir à quelques situations paradigmatiques, qui fournissent un tableau trop fragmentaire des problèmes cognitifs rencontrés par l'enfant pour que cela nous permette de comprendre le développement et le fonctionnement cognitifs.

Je me contenterai cependant d'évoquer trois problèmes cognitifs, relatifs à l'algèbre, et intéressants pour la psychologie cognitive.

Le premier concerne le fait que, pour montrer la fonction de l'algèbre à des élèves débutants, il faut très vite introduire des problèmes dans lesquels la mise en équation se traduit soit par deux équations à deux inconnues, soit par une équation comportant l'inconnue à droite et à gauche du signe d'égalité. C'est en effet dans ces cas-là que l'algèbre manifeste sa puissance par rapport à l'arithmétique, alors que pour des problèmes de type $ax + b = c$, l'algèbre ne fait que formaliser une solution arithmétique évidente par ailleurs. Il faut donc se donner les moyens didactiques d'aborder les fonctions de deux variables et de distinguer entre l'égalité des valeurs prises par deux fonctions distinctes et l'égalité de deux fonctions. Ceci nous projette immédiatement d'une conception de l'algèbre comme <u>outil</u> dans une conception de l'algèbre comme <u>objet</u> : les objets nouveaux à identifier sont ceux de fonction, de variable, d'équation, d'inconnue, de système, etc. Cela soulève donc au moins deux questions : celle du détour cognitif, celle des rapports entre connaissance-outil et connaissance-objet.

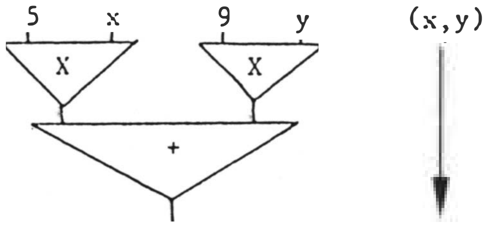
Le deuxième problème concerne les nombres négatifs. Quel statut leur donner, notamment lorsque la solution d'une équation est un nombre négatif ? Il n'y a pas d'algèbre possible aujourd'hui si elle ne porte pas sur l'ensemble des nombres, positifs ou négatifs, entiers ou rationnels, et réels non rationnels. Dans une présentation qui fait le choix d'introduire l'algèbre comme un outil de résolution de problèmes d'arithmétique, la question du sens à donner à la solution négative d'une équation est une question essentielle. En effet, les élèves, en particulier les élèves faibles, conçoivent les nombres comme des quantités et des grandeurs, toujours positives et jamais négatives. Pour donner aux nombres négatifs une signification réaliste, il faut que ces nombres représentent des objets pouvant être aussi bien négatifs que positifs : les nombres ne doivent donc pas être associés seulement à des grandeurs, mais aussi à des transformations, à des relations et à des abscisses. On est alors engagé sur un terrain nouveau, avec des solutions didactiques originales. L'innovation didactique peut conduire la psychologie à modifier sensiblement sa grille d'interprétation des erreurs des élèves.

Le troisième problème concerne la pluralité des représentations symboliques, et l'aide de ces représentations à la conceptualisation. Prenons l'exemple des fonctions de deux variables, qui ne sont pas abordées en tant que telles dans l'enseignement des mathématiques au niveau du collège, alors qu'elles sont implicites dans la résolution des systèmes linéaires. On pourrait penser qu'avec des élèves faibles comme ceux avec lesquels nous avons travaillé, il faut abaisser les exigences théoriques ; nous avons fait le choix inverse, parce que dans la conceptualisation, la transformation de concepts-outils en concepts-objets est absolument nécessaire. Or la représentation par des signifiants langagiers et non-langagiers joue un rôle crucial dans l'objectivation des concepts, à condition toutefois que cette représentation plonge ses racines dans une activité opératoire du sujet. Cette distinction outil/objet, introduite par Régine Douady dans sa thèse (1984) permet de reprendre certaines questions relatives au rôle de la métaconnaissance dans la connaissance, et au rôle de l'interaction sociale dans l'objectivation.

Voici quatre symbolisations différentes d'une fonction de deux variables:

1. L'expression analytique $5x + 9y$

2. Le schéma d'opérateurs




3. Les programmes H.P.

| de <u>planification</u> | et <u>d'exécution</u> |
|---|---|
| 5 | x |
| RCL Ø | STO Ø |
| X | y |
| 9 | STO 1 |
| RCL 1 | RS |
| X | |
| + | |

4. La notation générale des fonctions de deux variables $f\ (x,y)$

Du point de vue cognitif, et pour les élèves considérés, le schéma d'opérateurs a une double fonction de décomposition d'une procédure de calcul (en relation avec le programme H.P. correspondant), et d'objectivation de cette procédure. Cette objectivation est encore plus nette dans l'expression analytique $5x + 9y$ et surtout dans l'écriture

$$f(x,y) = 5x + 9y$$

qui, par le symbolisme fonctionnel $f(x,y)$, permet d'identifier une fonction et non plus une somme de deux produits.

Cette question de la transformation de la connaissance-outil en connaissance-objet est tout à fait cruciale pour la psychologie cognitive. Ce n'est pas un hasard si l'histoire des sciences et des techniques nous révèle la constitution progressive d'objets de connaissance nouveaux, munis de propriétés, de relations avec les autres objets, et s'offrant à des débats autour d'énoncés pouvant être vrais ou faux. Sans l'objectivation des concepts, et notamment sans l'explicitation que permet la symbolisation par des signifiants, de tels débats ne seraient pas possibles. La mise en équation, le script-algorithme, les formules de géométrie, de physique ou d'économie sont du côté de l'algèbre-outil, tandis que les concepts de fonction, de variable, d'équation, de système linéaire sont du côté de l'algèbre-objet.

Les enseignants doivent traiter ce double aspect de l'algèbre, de manière équilibrée, et sur une période de la scolarité qui ne soit pas trop longue (1 ou 2 ans) de manière que les élèves soient en mesure de tisser les liens nécessaires entre le versant outil et le versant objet de l'algèbre élémentaire. Mais cette gageure pour l'enseignant est aussi une gageure pour le psychologue car celui-ci ne peut espérer faire une description et une théorisation acceptables des compétences des élèves, et des difficultés qu'ils rencontrent à former ces compétences, si son cadre d'analyse évacue des questions aussi cruciales.

## Conclusion

La formation des concepts mathématiques est un processus à long terme. Elle implique la rencontre avec une grande diversité de situations qu'il faut analyser, classer, étudier. Elle implique la reconnaissance d'invariants de niveaux très différents. Elle implique également une variété de représentations symboliques : j'en ai donné deux exemples avec les tableaux de double proportionalité et avec les fonctions de deux variables, mais on rencontre ce problème partout en mathématiques. L'évolution des connaissances se fait par ajoût (la multiplication est un ajoût par rapport à l'addition), par concaténation et combinaison (les algorithmes algébriques par exemple), mais aussi par révolution : certains problèmes d'addition et de soustraction obligent l'enfant à remettre en cause ses premières conceptions de l'addition comme quantité qui s'accroît et de la soustraction comme quantité qui décroît (Gelman et Gallistel, 1978). Pour étudier ces évolutions, on ne peut plus se passer de l'expérimentation didactique.

On a évidemment besoin, pour étudier ces apprentissages, d'une dialectique stabilisation/déstabilisation. On ne peut déstabiliser en permanence les savoirs et savoir-faire fragiles des enfants, il faut au contraire trouver des moyens de les consolider, de les structurer, d'en étendre la portée. Une certaine automatisation par exemple est nécessaire : même s'il est juste de reprocher à l'enseignement traditionnel de faire une part trop grande à l'automatisation. Mais on n'échappe pas non plus à la nécessité de déstabiliser les savoirs et savoir-faire des enfants. Il faut savoir reconnaître les points sur lesquels la contradiction est inévitable entre le savoir nouveau à transmettre et le savoir ancien de l'élève qu'il faut à la fois utiliser et rejeter. Il faut donc construire des situations qui mettront en évidence cette contradiction et favoriseront les évolutions. Il faut identifier les expressions langagières et les symbolisations qui permettront aux élèves de comprendre.

Je terminerai sur un point d'orientation théorique, essentiel pour la psychologie cognitive. Certaines problématiques freinent la recherche à cause de leur caractère simplificateur. Par exemple il existe encore chez les psychologues une idée prototypique du concept, comme caractéristique nécessaire et suffisante d'un objet, pour qu'il appartienne à une certaine catégorie et puisse être désigné par tel ou tel nom. Cette idée est simpliste. Si elle fonctionne pour le concept de "bleu", elle ne fonctionne déjà plus pour le concept de "couleur", encore moins pour celui de nombre, ou pour celui de variable.
Il est urgent que les psychologues mettent leur pendule à l'heure et s'adressent à la complexité, notamment à celle qui nous est donnée par les situations de travail et d'éducation.

## REFERENCES

1. DOUADY R. (1984) - Jeux de Cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans le cursus primaire. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris 7.

2. GELMAN R., GALLISTEL C.R. (1978) - The child's understanding of number. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.

3. VERGNAUD G. (1968) - La réponse instrumentale comme solution de problème : contribution. Thèse de 3ème cycle. Université de Paris - Faculté des Lettres et Sciences Humaines.

4. VERGNAUD G. (1983), Didactique et acquisition du concept de volume. Recherches en Didactique des Mathématiques. 4, 1 numéro spécial - pages 9-120

5. VERGNAUD G., CORTES A., FAVRE-ARTIGUE P. (1988) - Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques, in Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987. La Pensée Sauvage, pages 259 - 279.

Mots d'entrée


| | page |
| --- | --- |
| Schème . . . . . . . . . . . | 2 |
| Concept . . . . . . . . . . | 3 |
| Champ conceptuel . . . . . . . | 4 |
| Théorème-en-acte . . . . . . . | 5 |
| Structures multiplicatives . | 5 |
| Algèbre . . . . . . . . . . . | 12 |
| Connaissance-outil . . . . . | 15 |
| Connaissance-objet . . . . . | 15 |
| Script-algorithme . . . . . | 14 |