Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant

In Psychologie
Piaget J., Mounoud P., Bronckart J.P.
Encyclopédie de La Pléiade, Paris, Gallimard (Ed.)
1987, pp.821-844
ISBN : 2070109933 - Gencode : 9782070109937

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1987_Fonction-Action-Symbolisation-Enfant_Psychologie

Psychologie

SOUS LA DIRECTION
DE JEAN PIAGET, PIERRE MOUNOUD
ET JEAN-PAUL BRONCKART

nrf Gallimard

ENCYCLOPÉDIE DE LA PLÉIADE

LES FONCTIONS DE L'ACTION ET DE LA SYMBOLISATION DANS LA FORMATION DES CONNAISSANCES CHEZ L'ENFANT

Le présent chapitre est tout entier consacré à l'analyse des rapports entre la connaissance et la réalité. Il développe une théorie de l'homomorphisme qui permet de situer d'une certaine façon les concepts d'*invariant opératoire* et de *règle d'action*, ainsi que les concepts de *signifié* et de *signifiant*.

Cette théorie prend évidemment appui sur l'apport décisif des travaux de Jean Piaget, mais l'interprétation qu'elle propose s'écarte à certains égards de l'interprétation piagétienne proprement dite. Elle situe par exemple de façon différente le problème du rapport de la connaissance avec la réalité objective et l'action, et elle diversifie la notion d'opération de pensée en fonction du contenu et des propriétés des objets de pensée.

La conception cognitiviste qui est schématiquement exposée dans ce chapitre ne prétend pas épuiser le problème des fonctions d'utilisation du milieu, tant s'en faut. Mais le parti qui est pris ici d'analyser d'une façon rigoriste le rôle de la représentation n'est pas gratuit. En effet, l'appropriation active des connaissances mathématiques et physiques, qui est l'objet de recherche de l'auteur de cet article, ne se satisfait pas de vues générales. Elle appelle au contraire des précisions toujours plus grandes sur la nature des objets et des relations en jeu, sur la nature des actions matérielles, sur celle des opérations de pensée, sur celle enfin des signifiants utilisés et des opérations sur ces signifiants.

Cette conception donne une place fondamentale aux concepts d'invariant opératoire et de règle d'action. C'est que ceux-ci se trouvent à la charnière des rapports entre le réel et la connaissance pratique et théorique que le sujet s'en forme : le concept d'invariant opératoire est indispensable pour comprendre comment la pensée du sujet reflète le réel. Celui de règle d'action est indispensable pour comprendre comment l'action du sujet est reliée à cette représentation, dont elle est à la fois la source et le critère.

CONDUITE ET REPRÉSENTATION

Dans une conception behavioriste du sujet, les rapports avec le milieu sont interprétés en termes de *conditionnement*, de *renforcement*, de *liaison associative*, sans qu'on fasse jamais appel à la notion de *représentation*. Dans certaines conceptions cognitivistes, on fait un pas au-delà en introduisant le concept théorique de *règle de production* pour rendre compte des actions du sujet, mais la représentation n'est pas analysée en tant que telle.

Or, la représentation n'est pas un épiphénomène, une sorte de traduction *a posteriori* des rapports du sujet avec le milieu, lesquels seraient régis par des principes et des lois autonomes dans lesquels la représentation n'interviendrait pas. Au contraire, *la représentation est fonctionnelle*. Sa fonction est de permettre, en reflétant certaines propriétés du réel, d'opérer sur les signifiés et les signifiants correspondant à ces propriétés, et de déterminer ainsi des règles qui déterminent la conduite du sujet. Plus précisément, il existe des *homomorphismes* entre la réalité et la représentation, qui font de celle-ci un moyen de « calculer » des relations, des règles d'action et des prévisions.

Prenons un exemple simple :

Soit un dispositif de barres encastrées les unes dans les autres comme sur le schéma suivant. On demande à l'enfant de tirer la barre R.

La relation fondamentale est la relation d'encastrement

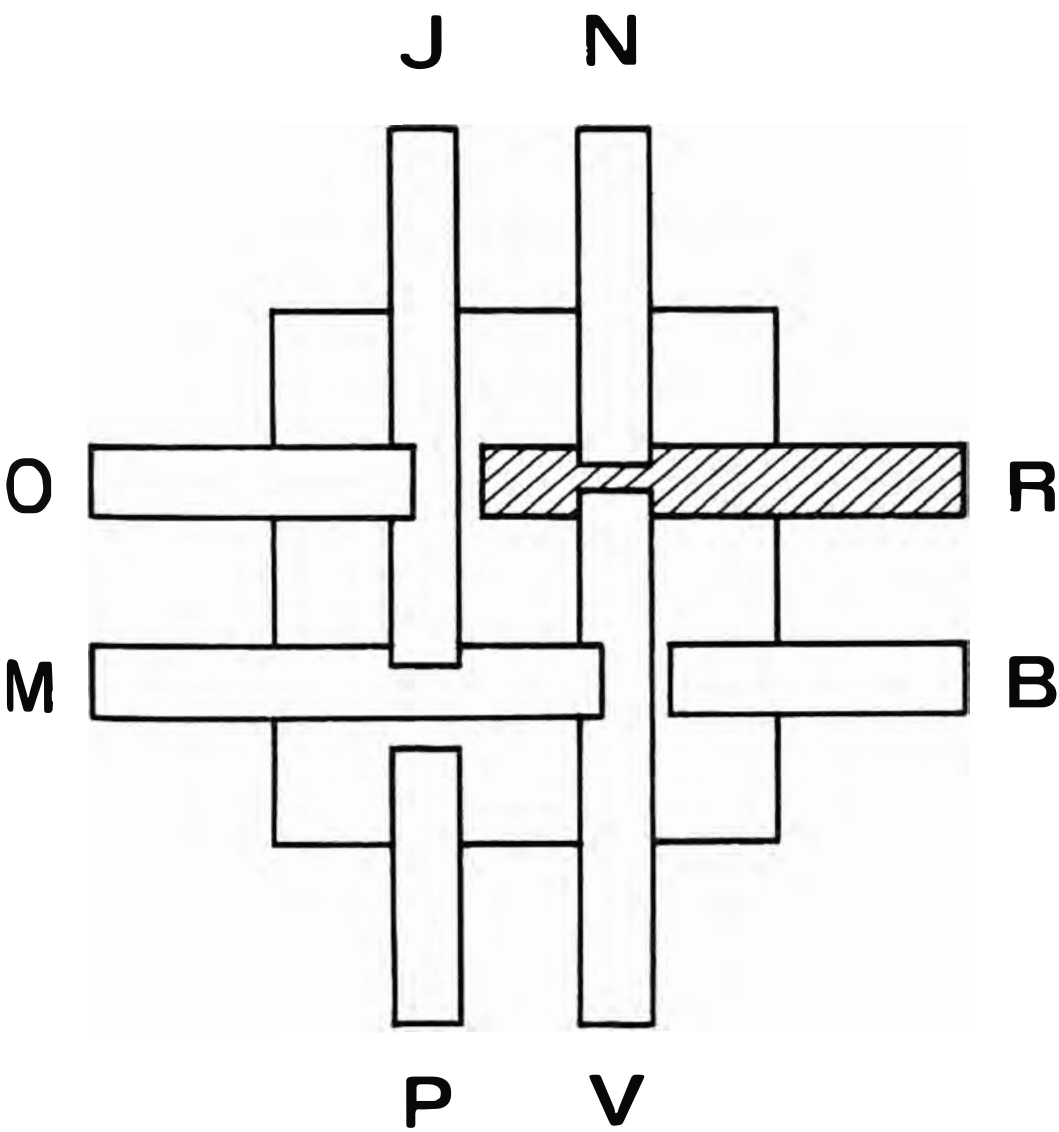
$X \rightarrow Y$: la barre X est encastrée dans la barre Y.

Cette relation est antisymétrique.

$(X \rightarrow Y) \Rightarrow (Y \not\rightarrow X)$: si X est encastrée dans Y, Y n'est pas encastrée dans X

Plusieurs règles peuvent être formulées ; pour ne pas

FIGURE 1



alourdir l'exposé, nous nous en tiendrons à la formulation suivante :

$X < Y$: il faut tirer X pour pouvoir tirer Y

Cette relation est antisymétrique et transitive.

Plusieurs sortes de calculs relationnels sont en jeu dans la solution d'un tel problème.

1. La déduction d'une règle de conduite à partir de la relation d'encastrement.

$(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X < Y)$

La barre X est encastrée dans $Y \Rightarrow$ il faut tirer X pour pouvoir tirer Y.

Cette déduction, pour élémentaire qu'elle soit, n'en suppose pas moins l'antisymétrie des relations $\rightarrow$ et $<$. Cette antisymétrie, qui n'est pas saisie par la majorité des enfants avant 5 ans et demi, permet de remonter de proche en proche, de la barre bloquée à la barre qui bloque, c'est-à-dire de R à V, de V à M, de M à J, de J à O.

Avant cinq ans et demi, la plupart des enfants passent aussi bien de V à R que de R à V, et l'enchaînement de leurs actions est réglé également par des procédures qui n'ont rien à voir avec la relation d'encastrement : par exemple, la procédure qui consiste à tirer les barres de proche en proche en suivant le contour du dispositif : R, B, V, P, etc.

2. La déduction par transitivité de la barre qu'il faut tirer en premier.

$$\left.\begin{array}{l} V < R \\ M < V \\ J < M \\ O < J \end{array}\right\} \Rightarrow O < R : \text{il faut tirer O pour pouvoir tirer R.}$$

Cette déduction, moins élémentaire que la première, n'est pas faite par la majorité des enfants avant 7 ou 8 ans environ.

Représentons dans un schéma (Figure 2) les principales fonctions mises en œuvre par le sujet qui tire O en premier.

Selon un tel schéma, la représentation a deux propriétés essentielles :

— elle est opératoire puisqu'elle fournit des regles d'action,

— elle est calculable puisqu'elle permet des déductions.

Son efficacité repose sur les homomorphismes entre réalité et représentation qui assurent l'équivalence entre le chemin en gros traits et le chemin en traits fins, équivalence qui traduit que l'effet espéré est obtenu. Ces homomorphismes ne traduisent pas autre chose que l'identité de structure entre d'une part les aspects pertinents de la réalité matérielle quant à l'effet à obtenir ou à prévoir, et d'autre part les concepts et calculs mis en œuvre dans la représentation. Précisons qu'il existe des homomorphismes pour les différentes catégories de propriétés et de relations. La notation polonaise permet de les écrire de façon homogène.

Soient :

• x, y, z des éléments de E, ensemble de départ ;

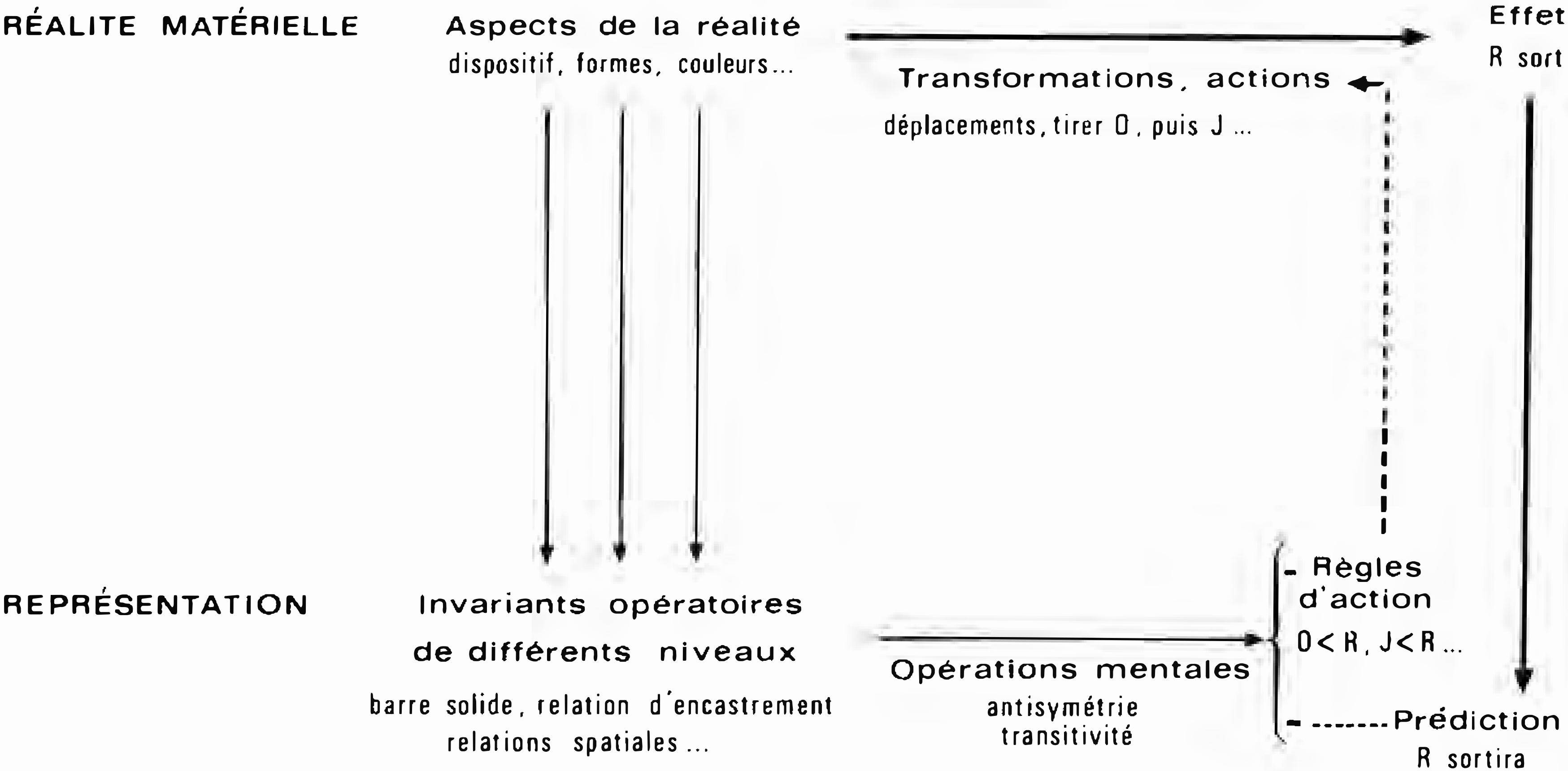

RÉALITE MATÉRIELLE
Aspects de la réalité
dispositif, formes, couleurs...
Effet
R sort
Transformations, actions
déplacements, tirer O, puis J ...
REPRÉSENTATION
Invariants opératoires
de différents niveaux
barre solide, relation d'encastrement
relations spatiales ...
Opérations mentales
antisymétrie
transitivité
- Règles
d'action
O< R, J< R ...
- ....Prédiction
R sortira

FIGURE 2

• f un homomorphisme de E dans F, ensemble d'arrivée ;

• P_1 une propriété, R_2 une relation binaire, R_3 une relation ternaire dans E et P'_1, R'_2, R'_3 les aspects relationnels correspondants dans F :

Homomorphisme de propriété :

$$\forall x \in E,\ P_1(x) \Longrightarrow P'_1(f(x))$$

Homomorphisme de relation binaire :

$$\forall x,y \in E \quad R_2\ (x,y) \Longrightarrow R'_2\ (f(x),\ f(y))$$

Homomorphisme de relation ternaire :

$$\forall x,y,z \in E \quad R_3\ (x,y,z) \Longrightarrow R'_3\ (f(x),\ f(y),\ f(z)).$$

etc,

Cas particulier — *homomorphisme de loi de composition binaire* :

$$\forall x,y,z \in E \quad x = y \circ z \Longrightarrow f(x) = f(y) \circ' f(z)$$

soit, en substituant y o z à x dans la seconde égalité

$$\forall y,z \in E \quad (f(y \circ z) = f(y) \circ' f(z)$$

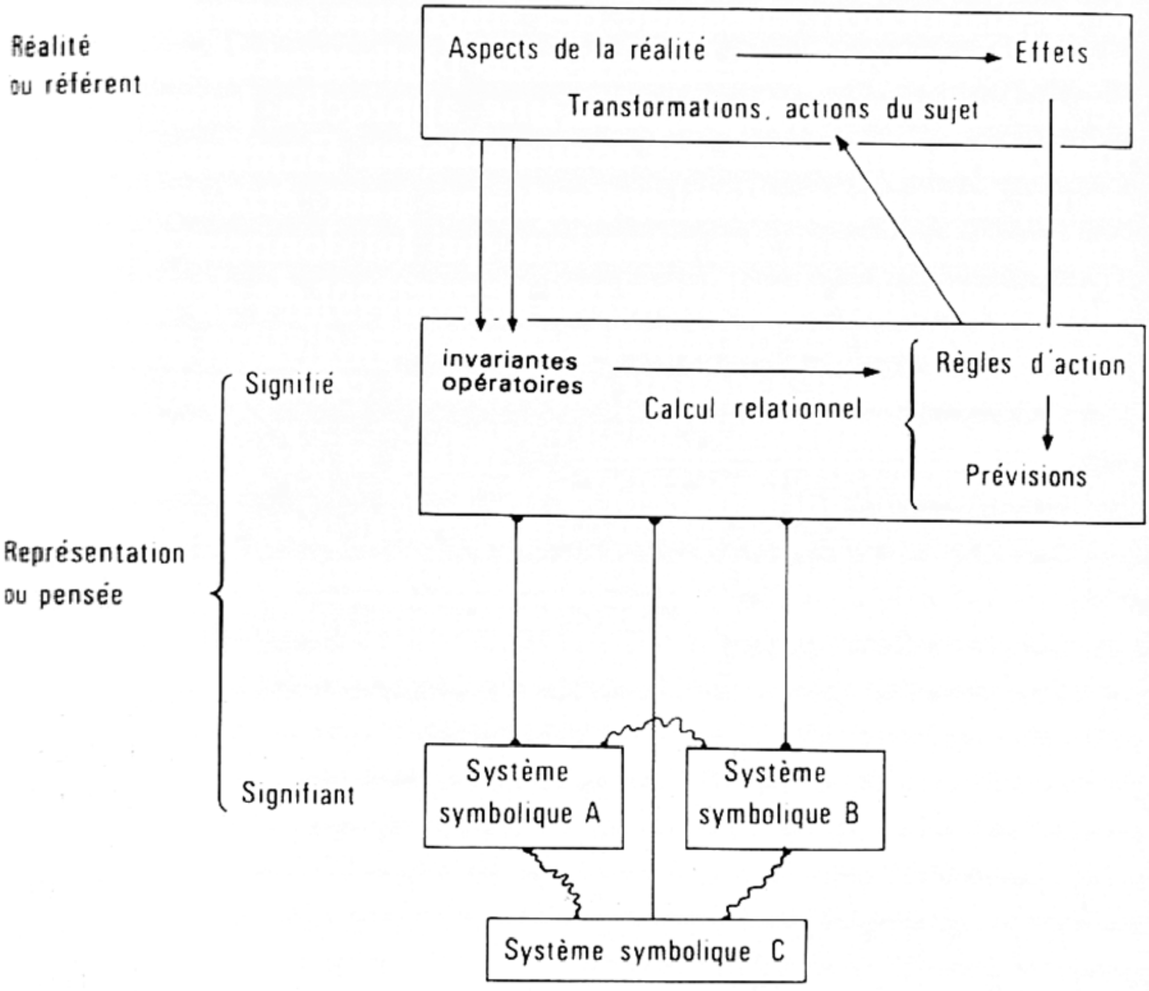
on retrouve ainsi la définition classique de l'homomorphisme.

Mais ce schéma de base demande à être enrichi et appelle plusieurs sortes de commentaires :

1°. La représentation consiste en une grande diversité de niveaux et de formes. On ne peut pas mettre sur le même plan les invariants concernant la couleur, la forme ou la taille d'un objet solide, les relations mécaniques ou physiques entre objets, les relations de parenté entre personnes, les invariants propres aux classes d'objets et aux relations et opérations entre classes, les relations entre grandeurs physiques ou entre nombres, etc. On ne peut pas non plus mettre sur le même plan des symbolismes aussi différents que les formes du langage naturel, les signes de l'algèbre, les éléments symboliques du graphisme.

Cette remarque conduit à distinguer entre le plan des signifiés (invariants opératoires et calculs relationnels) et le plan des signifiants (formes symboliques utilisables). Si les calculs et inférences se situent fonda-mentalement au plan du signifié, il n'est pas rare que ce travail soit accompagné, favorisé ou même condi-tionné par des opérations au plan du signifiant : verba-lisation d'un raisonnement, exécution des quatre opérations arithmétiques avec de grands nombres, calcul algébrique, etc.

FIGURE 3



Cette distinction entre signifiés et signifiants est mise en évidence dans la figure 3. À titre d'exemple, le système A peut être le langage naturel, le système B un diagramme, le système C l'algèbre. Ces systèmes sont en interaction avec les signifiés (liens droits) et entre eux (liens souples).

La représentation fait appel à une diversité de signifiants, supports matériels de la communication humaine et de la pensée. Ces signifiants renvoient eux-mêmes à la diversité des signifiés. Mais on ne classe pas les signifiés selon les mêmes critères que les signifiants : alors que les premiers s'organisent en invariants de différents niveaux, les seconds s'organisent en répertoires de signes munis de règles syntaxiques. La syntaxe de l'algèbre et celle des représentations graphiques n'ont que peu de choses en commun, et les propriétés qu'elles symbolisent sont différentes.

Il est essentiel de remarquer que les signifiants ne renvoient pas directement à la réalité mais aux signifiés, lesquels sont internes à la représentation. On reconnaît là la distinction classique des linguistes entre référent, signifié et signifiant. Elle va nous permettre de redéfinir ce qu'est un concept, pour une approche interactionniste de la formation des connaissances. En effet, l'étude de la formation d'un concept ne peut être conduite indépendamment des situations qui lui donnent du sens d'une part, des signifiants qui permettent de désigner et de symboliser ses différentes propriétés d'autre part. On est ainsi conduit à définir un concept comme un triplet de trois ensembles :

$$\text{Concept} = (S, I, \mathcal{S}).$$

S = ensemble des situations de référence qui donnent du sens au concept ;

I = ensemble des invariants opératoires de différents niveaux qui sont constitutifs du concept (propriétés) ;

$\mathcal{S}$ = ensemble des signifiants (systèmes symboliques) qui permettent de symboliser le concept, ses propriétés, et les situations qu'il permet de traiter.

Nous reviendrons plus loin sur les conséquences de ce point de vue.

2°. L'activité du sujet joue un rôle décisif dans la formation des invariants, car ce sont les transformations engendrées par les actions du sujet et par son activité expérimentale sur les objets qui permettent la construction des premiers invariants.

Cette activité du sujet dans la construction ou l'appropriation des invariants ne consiste pas exclusivement en une activité matérielle. Les calculs relationnels ou inférences qu'il opère parallèlement sont essentiels. C'est ce double travail sur les objets d'une part, sur les invariants d'autre part qui permet d'assurer progressivement l'adéquation des seconds aux premiers et d'enrichir progressivement la représentation :

— en la complexifiant (prise en compte de propriétés et relations de plus en plus complexes),

— en la rendant plus cohérente (coordination de champs séparés),

— en opérant des différenciations : invariance sous certaines conditions, pas sous d'autres.

Le schéma proposé plus haut met d'ailleurs en évidence deux boucles fondamentales :
— celle de l'homomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\text{aspects de la réalité} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{transformation}"'] \arrow[d] & & \text{effets} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{invariants} \arrow[rr, "\text{calculs relationnels}"'] & & \text{prévisions}
\end{tikzcd}$$

celle de l'intervention active du sujet dans la formation des invariants

$$\begin{tikzcd}
\text{aspects de la réalité} \arrow[rr, Rightarrow] & \text{actions} & {} \\
\text{invariants} \arrow[u] \arrow[rr, "\text{calculs relationnels}"'] & & \text{règles d'action} \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

3°. Le concept d'homomorphisme entre réel et représentation soulève un double problème : d'*objectivité* de la représentation, et de *validité* des calculs. Introduire ce concept d'homomorphisme, pour rendre compte de la formation des connaissances rationnelles, ne doit pas conduire à la thèse, évidemment fausse, que toute représentation est homomorphe au réel. On sait bien qu'il existe de faux invariants, des règles d'action erronées, des inférences fausses. C'est d'ailleurs l'une des tâches du psychologue que de les décrire, de les analyser, de comprendre les processus qui leur donnent naissance, qui les renforcent, ou qui permettent de les éliminer. Les conceptions des enfants à l'égard de la soustraction ou du volume, par exemple, connaissent des évolutions impressionnantes, que nous verrons plus loin.

En outre la représentation n'est pas *exhaustive*. Elle n'a nul besoin, pour être objective et opératoire, de refléter tous les objets, avec toutes leurs propriétés. Il suffit qu'elle reflète adéquatement les aspects pertinents de la situation présentée. Ainsi la taille des barres n'est pas pertinente pour la solution du problème des barres encastrées, du moins dans des limites raisonnables de variation de la taille des barres.

La suite de ce chapitre est consacrée à quelques exemples, destinés à illustrer la théorie que nous venons d'exposer.

Il est en effet impossible, dans un chapitre aussi court, de rapporter beaucoup de travaux ou même de donner beaucoup de détails.

Nous avons donc pris le parti d'analyser un premier exemple permettant d'illustrer des niveaux différents de compréhension d'un même concept, et par conséquent la reconnaissance d'invariants de différents niveaux : le concept de *volume* se prête particulièrement bien à cette démonstration.

Un second exemple, celui de la *droite numérique,* illustre le processus difficile d'appropriation par les enfants d'un système symbolique qui est transparent pour les adultes cultivés, mais qui demande en fait des opérations de pensée très complexes, sur lesquelles butent de nombreux enfants.

La dernière partie est consacrée au concept de champ conceptuel : elle porte sur quelques conséquences théoriques d'une approche de la formation des connaissances centrée sur les contenus.

ÉVOLUTION D'UN CONCEPT : LE VOLUME

La conservation du volume telle qu'elle est abordée à travers les expériences de Piaget ne touche qu'une petite partie des problèmes qui se posent à propos du volume. Dès l'âge de cinq ans et en tout cas avant huit ans, certaines situations ont du sens pour les enfants et donnent déjà lieu à des conduites opératoires. Par exemple :

1 - De deux théières A et B, laquelle est la plus grande ? Et comment s'en assurer ?

2 - Combien de verres contient cette bouteille C ? et cette autre D ?

3 - Que se passe-t-il si on prend un verre plus petit ?

4 - Est-ce qu'on peut mettre le contenu de C et de D dans une troisième bouteille E ?

Chacune de ces situations-problèmes conduit à une certaine arithmétisation du volume, puisque les actions faites et les jugements énoncés portent en partie sur la mesure des objets volumiques. Certes, les égalités ou inégalités constatées et les formulations additives sont relativement simples, mais elles n'en expriment pas moins la reconnaissance explicite ou la construction d'invariants non triviaux. Citons trois exemples :

I - le nombre de verres contenu dans la bouteille C sera le même si je recommence l'opération.

II - si $A > C$ alors $A + D > C + D$

III - si C contient 5 verres et D 4 verres, et que le transvasement de C et de D en E remplit exactement E, alors le contenu de E est égal à 9 verres (5 + 4).

Ces invariants ont un domaine limité de validité. Ils s'appliquent aux récipients pour des capacités qui se situent dans un domaine de valeurs relativement restreint (les grands récipients et les très petits soulèvent d'autres difficultés) et avec une approximation très grossière des évaluations (il n'est pas question d'évaluer le contenu d'une bouteille en cm^3). Les objets solides sont exclus de cette première arithmétisation du volume et les enfants ne sont pas encore en mesure de surmonter les contradictions apparentes entre les indices perceptifs qu'ils prennent en compte pour évaluer un volume (la hauteur de liquide dans un verre par exemple) et les transformations qui modifient ces indices en laissant invariant le volume : c'est le mérite de Piaget d'avoir découvert ces moments délicats du développement cognitif, mais cette découverte a en même temps polarisé le problème de la conceptualisation du volume sur un aspect excessivement particulier. En effet, la conservation du volume telle qu'elle est décrite par Piaget est précédée par d'autres épisodes intéressants de la conceptualisation du volume comme ceux que nous venons d'évoquer ; et elle est également suivie par d'autres épisodes intéressants qui concernent les élèves beaucoup plus âgés. Par exemple :

5 - Comment calculer un volume à partir de mesures portant sur les longueurs ou les surfaces (parallélépipède rectangle, prisme, sphère) ?

6 - Quel rapport y a-t-il entre le volume d'un grand aquarium et celui d'un petit si le premier est deux fois plus long, trois fois plus large et deux fois plus profond que le second ?

7 - Que devient l'expression numérique d'une mesure

de volume quand je prends une unité de longueur 10 fois plus petite ?

8 - Comment évaluer le volume d'un objet plein dont la forme n'est pas géométriquement simple ?

9 - Comment évaluer un grand volume ?

Il serait inconsidéré de penser que ces questions ne relèvent que d'un apprentissage scolaire. La recherche montre au contraire que l'appropriation des connaissances enseignées à l'école soulève des problèmes d'appropriation par l'élève tout à fait comparables à ceux qu'on relève dans l'étude du développement cognitif du jeune enfant. Par exemple les questions 5 à 9 impliquent des propriétés du concept de volume et des relations qui sont autant d'invariants opératoires.

En vérité, ces invariants sont de véritables *théorèmes-en-acte* :

— *théorèmes* parce qu'on peut effectivement les exprimer comme des théorèmes. Nous allons le voir sur quelques exemples ;

— *en acte* parce que les enfants et les adolescents peuvent souvent les utiliser sans pour autant être capables de les exprimer.

Un théorème-en-acte est donc un invariant opératoire relationnel.

Premier exemple : la compétence III

Si C contient 5 verres et D 4 verres, et que le transvasement de C et de D en E remplit exactement E, alors le contenu de E est égal à 9 verres (5 + 4).

Cette compétence est évidemment analogue à la compétence d'un enfant qui découvre que, ayant compté 5 filles et 4 garçons, il n'a pas besoin de recompter tous les enfants pour savoir qu'ils sont 9 (5 + 4).

Ces deux compétences traduisent la compréhension, en acte, d'un axiome essentiel de la théorie de la mesure.

$\forall x, \forall y$ mesure $(x \otimes y)$ = mesure (x) + mesure (y).

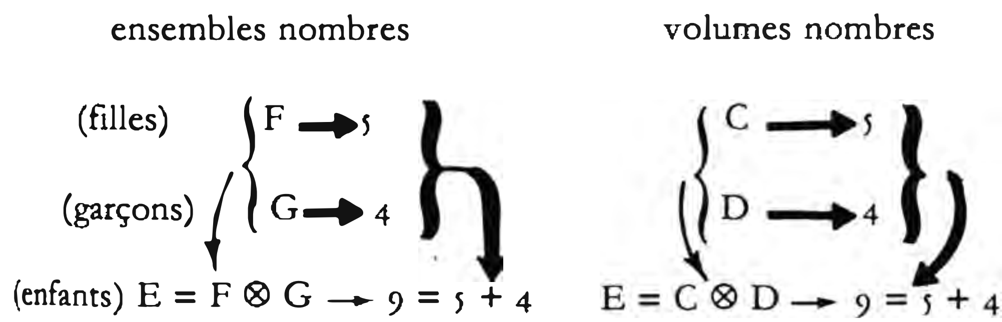
En effet, cet axiome affirme qu'il revient au même, pour trouver la mesure d'un objet composé

$$z = x \otimes y$$

soit de mesurer z directement, soit de mesurer ses deux parties x et y et de faire l'addition des mesures ainsi trouvées.

Pour mieux saisir la signification de ce théorème-en-acte, mettons-le sous la forme d'un schéma :

Exemple des filles et des garçons *Exemple des récipients*



Dans l'exemple des filles et des garçons, la composition est simplement l'union disjointe des parties d'ensemble ; dans l'exemple des récipients, c'est le transvasement dans un même récipient de deux contenus miscibles. Dans les deux cas, le théorème-en-acte dit qu'il revient au même pour trouver la mesure de l'objet composé E, soit de composer d'abord les parties et de prendre la mesure ensuite (procédure en traits fins), soit de prendre la mesure des parties d'abord et d'additionner les mesures ensuite (procédure en gros traits).

C'est un exemple élémentaire d'homomorphisme, mais il est constitutif de la compétence des enfants à opérer des additions. En effet, la procédure en traits fins qui est celle des jeunes enfants (recompter le tout) n'implique nullement l'addition ; c'est une conquête laborieuse des enfants entre 5 et 8 ans que l'utilisation de la procédure en gros traits. Cela ne se fait pas en une seule étape (Fuson, 1983). En outre on imagine aisément qu'il existe un décalage important entre l'acquisition de la même compétence pour les ensembles discrets et pour le volume.

Deuxième exemple : la compétence requise pour réussir la question 6

Quel rapport y a-t-il entre le volume d'un grand aquarium et celui d'un petit si le premier est 2 fois plus long, 3 fois plus large et 2 fois plus profond que le second ?

Cette compétence n'est acquise que par la moitié des élèves au niveau de la classe de troisième en France (15 ans environ). On est donc très loin du niveau de développement observé pour la compétence III. Pour ana-

lyser cette compétence il faut faire référence aux propriétés de la fonction trilinéaire
$\forall x_1, x_2, x_3\ [\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\ f(x_1, x_2, x_3)]$

Soient deux parallélépipèdes rectangles ;
si x_1, x_2 et x_3 sont les trois dimensions linéaires du premier parallélépipède, λ_1, λ_2, λ_3 les rapports entre les dimensions linéaires du second et celles du premier, alors le rapport entre les volumes du second et du premier est égal à $\lambda_1 x \lambda_2 x \lambda_3$. Ceci est vrai quels que soient x_1, x_2 et x_3, y compris s'ils ne sont pas connus comme dans l'exemple ci-dessus, et quels que soient λ_1, λ_2, λ_3. Ces rapports ont des valeurs simples dans l'exemple donné ci-dessus ($\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 2$) ; ce n'est donc pas le cas le plus difficile. Sous sa forme générale, la question 6 est évidemment plus ardue et suppose un théorème-en-acte d'une relativement grande complexité, qui suppose une conception tridimensionnelle du volume, c'est-à-dire une analyse du volume comme résultat de la composition de trois longueurs. Cette conception tridimensionnelle n'est évidemment pas nécessaire pour l'émergence des compétences I, II, III qui ne font appel qu'à une conception unidimensionnelle du volume ; c'est-à-dire à l'idée que le volume est une grandeur mesurable à l'aide d'une unité de mesure de même nature : par exemple le contenu d'un verre pour mesurer le contenu d'une bouteille.

Entre une conception unidimensionnelle du volume, qui caractérise les premières compétences des enfants, et la conception tridimensionnelle du géomètre, il existe une longue évolution, qui peut être décrite par l'appropriation d'invariants opératoires de complexité croissante. À l'intérieur d'une conception unidimensionnelle du volume, on peut repérer des compétences différentes ; de même à l'intérieur d'une conception tridimensionnelle. En outre les deux conceptions ne sont pas séparées mais articulées l'une par rapport à l'autre. Par exemple, dans le cas des valeurs entières 2, 3 et 2 proposées plus haut, pour la question 6, une conception unidimensionnelle du volume permet à certains élèves de réussir : il leur suffit par exemple de paver mentalement le grand aquarium avec le petit pris comme unité. Cette procédure n'est pas praticable lorsque les rapports λ_1, λ_2

et λ_3 ne sont pas des entiers, et une conception unidimensionnelle du volume est alors insuffisante.

Nous venons d'illustrer, sur l'exemple du volume, plusieurs idées distinctes :

— la multiplicité des compétences qui jalonnent le processus d'appropriation d'un seul concept,
— la longue durée de ce processus,
— la possibilité de caractériser ces compétences par la reconnaissance ou la construction de véritables théorèmes-en-acte (invariants relationnels),
— la caractérisation de certains théorèmes par une structure d'homomorphisme.

Les dernières remarques que nous venons de faire nous permettent d'illustrer une idée nouvelle : lorsque λ_1, λ_2, λ_3 sont des entiers simples, on peut résoudre la question 6 avec une conception unidimensionnelle du volume. Ce n'est plus possible lorsque λ_1, λ_2, λ_3 sont des réels quelconques.

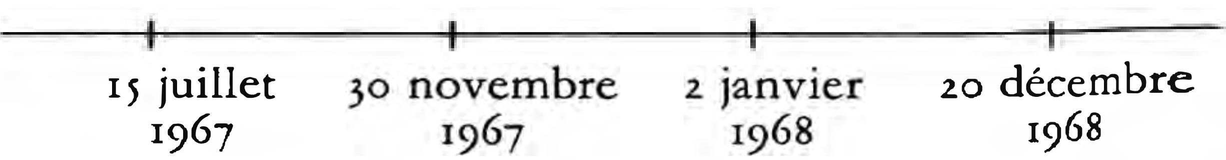
Les situations de référence qui donnent du sens au concept de volume n'ont donc pas toutes les mêmes vertus. Il suffit parfois de changer les valeurs numériques, comme dans le cas qui nous occupe ici, pour conduire l'élève à prendre conscience de l'insuffisance d'une conception unidimensionnelle et à passer éventuellement à une conception tridimensionnelle. C'est la théorie que Guy Brousseau a formulée sous l'expression de « théorie des situations didactiques ». Non seulement les conduites dépendent des valeurs des variables de situations, ce que le psychologue sait depuis longtemps, mais la modification des valeurs des variables peut être d'un grand intérêt didactique. En effet, le maître dispose, avec cette manipulation des variables de situation, d'un moyen technique relativement efficace pour provoquer l'élargissement et la modification des conceptions des élèves. Il dispose aussi d'autres ressources comme la variation des situations de référence, la variation des questions posées, la variation et la clarification des signifiants qui permettent de représenter ces situations.

APPROPRIATION D'UN SIGNIFIANT COMPLEXE : LA DROITE NUMÉRIQUE

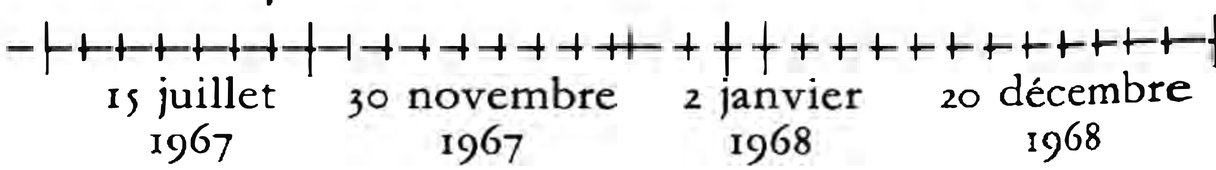
Représenter des nombres par des points sur une droite orientée est devenu si naturel qu'on a peine à imaginer les difficultés auxquelles un tel système symbolique donne lieu chez les enfants. En outre le fait qu'on observe des jeunes élèves, dès l'âge de sept ou huit ans, reporter sur une feuille la graduation de leur double décimètre, contribue à entretenir l'illusion qu'il s'agit pour eux de la même activité que pour l'adulte. Il n'en est évidemment rien, et les opérations de pensée qui sont nécessaires pour placer et lire des données numériques sur une droite méritent d'être analysées avec quelque détail.

Considérons deux protocoles d'enfants de dix ans dans une tâche de placement de dates de naissance.

Protocoles α



Protocole β



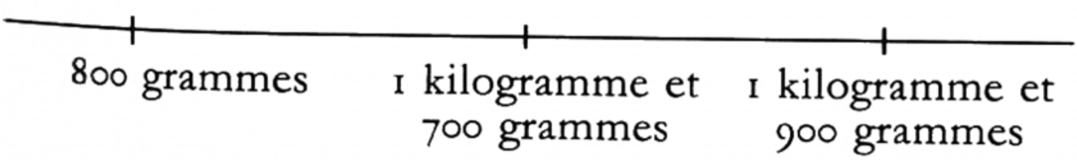
L'auteur du protocole α se contente d'ordonner régulièrement des points représentant les dates, et ne tient aucun compte des durées différentes entre dates. L'auteur du protocole β représente les dates comme des segments, la longueur de chaque segment correspondant au rang du mois dans l'année : 7 unités pour juillet, 11 unités pour novembre, 1 unité pour janvier, 12 unités pour décembre. Les segments sont placés bout à bout ; il n'y a pas d'inclusion entre les durées ; le jour du mois et l'année sont laissés de côté et ignorés. Il y a ainsi une confusion entre événement et durée, et entre les aspects ordinal et cardinal des données.

Lequel de ces deux protocoles se rapproche le plus du concept d'échelle et de la représentation du temps sur une droite ? On est embarrassé pour en décider tant les protocoles α et β sont éloignés de ce qui pourrait être considéré comme un protocole acceptable.

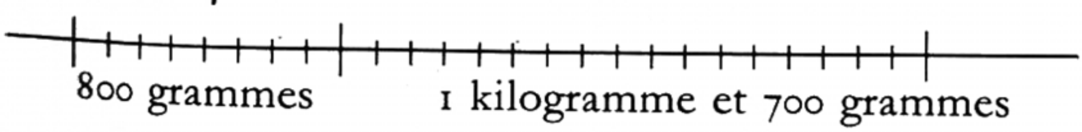
Pourtant l'un et l'autre traduisent certaines propriétés des données. Le protocole α ne reflète que l'ordre temporel, représenté par l'ordre spatial de gauche à droite. Le protocole β reflète en outre un début de prise en considération des durées, symbolisées par des segments dont la mesure représente des intervalles de temps (janvier-juillet), (janvier-novembre), etc. Certes le résultat paraît aberrant, mais les nombreux élèves qui s'engagent dans cette voie ont au moins le souci d'utiliser les aspects mesurables de l'espace pour représenter des aspects mesurables du temps qui s'écoule.

Les protocole α' et β' constituent des protocoles analogues aux protocoles α et β dans une tâche de placement de poids

Protocole α'



Protocole β'



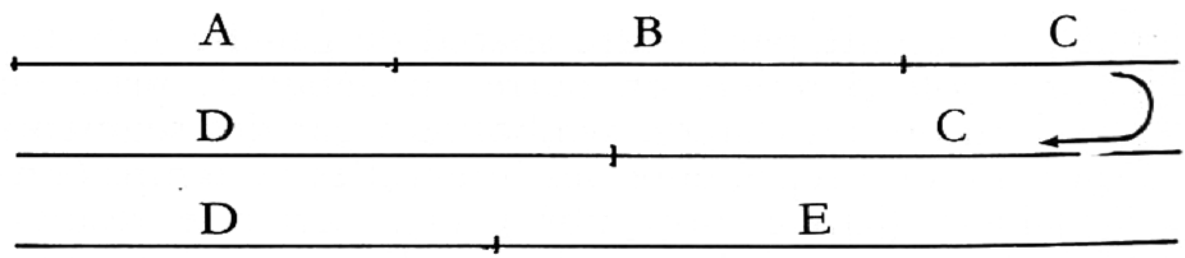
Cette analogie témoigne de l'existence de processus communs aux deux tâches de placement de données numériques et de placement de dates.

En s'en tenant à l'essentiel, on peut distinguer trois grands types de difficultés pour les élèves de dix à treize ans, avec lesquels une étude approfondie a été menée.

LE PRINCIPE D'INCLUSION DES SIGNIFIANTS

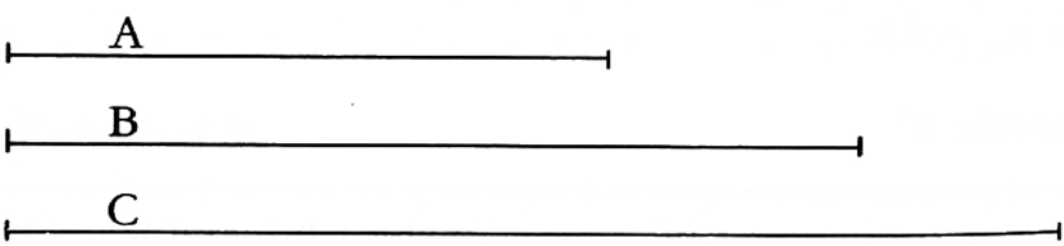
Les protocoles β et β' traduisent tous les deux l'incapacité dans laquelle se trouvent les enfants de représenter la première donnée par un segment inclus dans le segment représentant la seconde donnée ; et dans le segment représentant la troisième donnée ; et ainsi de suite.

Cela est si vrai qu'ils placent les segments bout à bout, jusques et y compris en utilisant une seconde ligne, puis une troisième comme dans le protocole ci-dessous : A, B, C et D sont des données numériques.



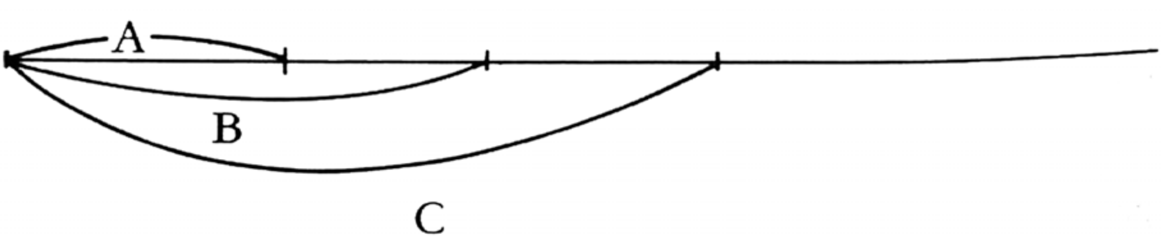
Pour dépasser cette difficulté, les enfants utilisent plusieurs possibilités,

— soit des segments différents superposés



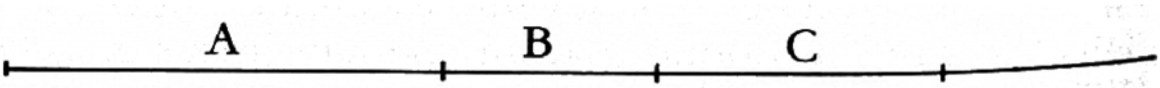
ce qui permet d'obtenir à la fois des signifiants distincts pour des signifiés distincts, et une même base de départ qui favorise la comparaison ;

— soit des segments emboîtés



que l'enfant prend soin de bien identifier pour montrer leur emboîtement,

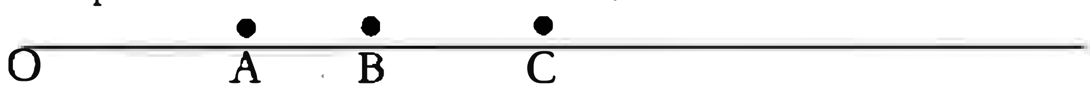
— soit des segments emboîtés mal désignés (désignation ambiguë) :



Dans ce dernier protocole, alors que les points sont correctement placés, la donnée B est écrite au-dessus de la partie nouvelle sans qu'il soit fait référence à la partie commune A. De même pour C.

Le principe de ponctualisation

L'ambiguïté qui vient d'être relevée n'existe pas dans le codage qui consiste à indiquer l'origine commune O, et à ponctualiser les données A, B et C.



Mais cette construction, qui associe un nombre à un joint et réciproquement, n'est nullement transparente pour les enfants. Comment, en effet, associer un nombre à un point alors que le nombre est une mesure et qu'un point n'est pas mesurable ?

La ponctualisation suppose une identification entre l'ensemble des segments partant de l'origine et l'ensemble des points d'arrivée.

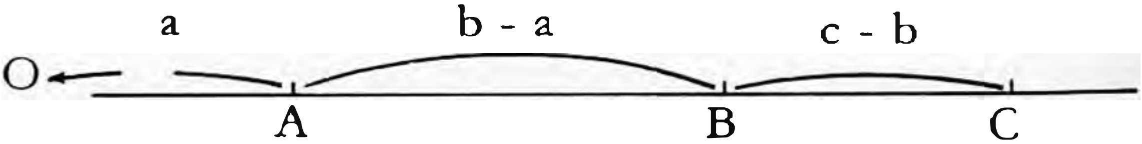
$\forall$ x segment OX $\leftrightarrow$ point X.

Elle repose sur les concepts d'origine et de distance à l'origine. Seule l'identification des points et des distances à l'origine permet d'associer un nombre à un point. Cette identification ne se fait pas toute seule, et l'on observe même des phénomènes paradoxaux : le protocole β présente un tel paradoxe puisqu'un événement (date) est représenté par un segment.

LE TRAITEMENT DES INTERVALLES COMME DES DIFFÉRENCES

Ponctualiser un nombre constitue un progrès significatif, mais ce progrès est directement lié au concept de distance à l'origine. Qu'arrive-t-il lorsque l'origine ne peut être placée sur la droite numérique, par exemple lorsque l'échelle choisie ne le permet pas ?

La réponse consiste bien entendu dans le traitement des intervalles entre points comme des différences entre données. Pour clarifier ce point, distinguons entre données numériques a, b, c et points A, B, C représentant ces données :



Ce traitement suppose que les nombres soient associés

tantôt à des points $a \leftrightarrow A$

$b \leftrightarrow B$

tantôt à des segments $b - a \leftrightarrow AB$

$c - b \leftrightarrow BC$

La compétence qui consiste à graduer une ligne et à subdiviser un intervalle en cas de besoin reflète bien cette synthèse entre points et segments d'une part, entre distances à l'origine et différences d'autre part.

Il s'agit d'opérations de pensée complexes, dont on ne peut être surpris qu'elles échappent encore à nombre d'enfants jusqu'à l'âge de 13 ans et plus.

Nous venons d'illustrer, sur l'exemple de la droite numérique, plusieurs idées distinctes :

— la complexité pour les enfants et les adolescents d'un système de signifiants apparemment transparent,

— la variété des opérations de pensée nécessaires à l'appropriation de ce système symbolique,

— la diversité et la hiérarchie des possibilités d'interprétation par les enfants de la même tâche de placement de données (plusieurs dizaines de catégories de protocoles en tout),

— l'utilisation des propriétés d'homomorphisme entre propriétés de l'espace et propriétés des données, dans la construction et l'utilisation de la droite numérique comme système symbolique.

CONTENUS DE CONNAISSANCE ET CHAMPS CONCEPTUELS

L'exemple du volume et celui de la droite numérique ont permis d'illustrer quelques questions importantes que pose à la psychologie cognitive et à la psychologie génétique l'étude de la formation des connaissances. Notre description montre que l'analyse des contenus de connaissance est un élément essentiel pour comprendre les conceptions et compétences des enfants et pour en décrire les évolutions. On voit mal comment on pourrait conduire l'étude des conceptions des enfants sur le volume et la droite numérique avec une approche qui s'en tiendrait soit à des compétences logiques, soit à des compétences psycho-linguistiques, soit encore à des « facultés » générales comme la mémoire ou l'intelligence. Le découpage des objets de recherche du psychologue qui s'intéresse au développement des connaissances doit donc faire une place importante aux questions de contenu.

En même temps, il serait illusoire de considérer le développement d'un seul concept ou d'une seule compétence. En effet, on ne peut conduire cette étude sans utiliser des situations bien caractérisées et sans décrire des conduites précises. Or, un concept ne renvoie pas habituellement à un seul type de situation ; une situation ne s'analyse pas avec un seul concept ; et, en outre, le processus d'appropriation d'un concept recouvre une longue période de temps, au cours de laquelle le sens du concept est puisé à plusieurs sources. Ce sont ces raisons qui m'ont conduit à introduire le concept théorique de *champ conceptuel*.

Un champ conceptuel est un ensemble relativement large de situations, d'invariants et de signifiants, dans lequel plusieurs concepts de nature différente sont en interaction, plusieurs compétences, plusieurs systèmes symboliques

Par exemple, l'ensemble des situations de multiplication et de division ne renvoie pas seulement aux concepts de multiplication et de division, mais aussi aux concepts de fonction linéaire, bilinéaire et n-linéaire, à la théorie de la mesure, à l'analyse dimensionnelle et au concept d'espace vectoriel, aux concepts de fraction, de rapport et de nombre rationnel.

On peut les représenter par des énoncés de la langue naturelle, des équations, des écritures fonctionnelles, des tableaux de correspondance, des graphiques, etc.

Notre définition du concept (voir ci-dessus) comme triplet de trois ensembles (Situations, Invariants, Signifiants) conduit donc à découper des objets d'étude relativement larges, que nous désignerons sous le nom de champs conceptuels. Ce sont eux qui donnent une certaine unité à l'étude des situations particulières, à l'étude des conduites observées et des formes symboliques utilisées. Les situations possibles sont nombreuses, ainsi que les classes de problèmes qu'on peut identifier dans ces situations. Il serait illusoire de les étudier indépendamment les unes des autres. En même temps, il faut rechercher une certaine unité.

Trouver une unité à des champs conceptuels comme ceux des structures additives, des structures multiplicatives, de l'espace, de la dynamique élémentaire, de la logique des classes, de l'électrocinétique, etc., ce n'est pas bien entendu nier l'interaction de ces champs conceptuels entre eux ; c'est seulement essayer de conserver une dimension raisonnable aux objets d'étude ainsi découpés.

Pour un champ conceptuel donné, il existe un nombre relativement grand de situations de référence et de catégories de problèmes. Leur étude montre à la fois qu'elles sont distinctes et cependant parentes : en effet les conduites qu'on peut observer comportent des aspects spécifiques de chaque catégorie de situation et des analogies qui témoignent des glissements de sens entre situations. Si la psychologie étudie et analyse ces conduites et les conceptions qui leur sont sous-jacentes, la didactique, de son côté, recherche les moyens de faire évoluer ces conceptions et les compétences qui leur sont associées. La didactique s'appuie donc nécessairement sur la psychologie. Mais elle ne s'y réduit pas et elle pose réciproquement des problèmes nouveaux à la psychologie.

Le premier problème que soulève la didactique est celui que nous avons traité tout au long de ce chapitre : la nécessité de prendre en considération, pour l'analyse cognitive et développementale, les contenus de connaissance.

Le second problème relève des rapports entre développement et apprentissage. Il serait en effet peu soutenable d'affirmer que les conduites observées par le psychologue sont indépendantes de l'expérience scolaire et extra-scolaire des enfants observés. Il serait d'ailleurs aussi peu soutenable d'affirmer que ces apprentissages expliquent à eux seuls les conduites observées. La réalité est plus complexe puisque le sujet ne retire des apprentissages reçus qu'une partie des acquisitions escomptées, et que ces acquisitions sont organisées par des rapports entre situations, des jeux d'analogies et de différence, des ruptures de complexité et des glissements de sens qui n'épousent guère la logique de la connaisance construite, mais celle d'une connaissance en voie d'appropriation, dont l'approche développementale permet de décrire les étapes et les processus les plus importants.

Dans le processus d'appropriation d'un champ conceptuel donné, par exemple celui des structures additives, interviennent des situations, des invariants opératoires et des signifiants d'une grande diversité. Alors que certaines situations ont du sens pour des enfants de 3 ou 4 ans (pour des valeurs numériques particulières), d'autres situations n'impliquant qu'une addition donnent lieu à une majorité d'échecs chez des adolescents de 15 ans. Entre ces deux moments, les enfants rencontrent plusieurs dizaines de classes de situations différentes, dégagent des invariants de différents niveaux et de plusieurs types (impliquant par exemple les concepts de mesure, de transformation temporelle, de comparaison, de différence, d'inversion, d'abscisse...) et manipulent plusieurs systèmes symboliques de représentation : diagrammes, équations, etc.

On ne voit pas comment il serait possible de caractériser cette évolution sans disposer d'un cadre théorique qui s'attaque en priorité au problème des contenus de connaissance et à la conceptualisation du réel. C'est ce que tente de faire le schéma théorique exposé dans ce chapitre, avec les éléments clefs que sont les invariants, les règles d'action et les signifiants, et l'articulation que nous en proposons autour des concepts d'homomorphisme et de champ conceptuel.

Gérard VERGNAUD.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G., *Problèmes de didactique des décimaux*, dans « Recherches en Didactique des Mathématiques », 2 (1), 1981, pp. 37-127.

FUSON K.C, HALL J.W., *The acquisition of early number word meanings : a conceptual analysis and review*, dans Ginsburg H. (Ed.), *The development of children's mathematical thinking*, Academic Press, New York, 198

3. PIAGET J., *La Formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Paris, 1945.

PIAGET J., INHELDER B., *Le Développement des quantités chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1941.

POLYA G., *Les Mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthiers-Villars, Paris, 1958.

RUSSELL B., *Signification et Vérité*, Flammarion, Paris, 1958.

RUSSELL B., *La théorie des types logiques*, « Revue de Métaphysique et de Morale », 18, 1910, pp. 263-301.

VERGNAUD G., *L'Enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang, Berne, 1981.

VERGNAUD G., *Introduction*, dans *Didactique et Acquisition du Concept de volume*, numéro spécial de « Recherches en Didactique des Mathématiques », 4 (1), 1983.