Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre

In Actes du Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique nov. 1986

Colette Laborde

La Pensée sauvage (Ed.)
1988, pp.189-199
ISBN : 2 85919 067 9

ACTES DU PREMIER COLLOQUE FRANCO-ALLEMAND DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Textes réunis et présentés
par Colette LABORDE

la Pensée Sauvage éditions

recherches en didactique des mathématiques

LONG TERME ET COURT TERME DANS L'APPRENTISSAGE DE L'ALGEBRE

Gérard Vergnaud [1]

On ne parle presque jamais d'algèbre pour les mathématiques enseignées à l'école élémentaire. Même au niveau de l'école secondaire en France, les professeurs de mathématiques tendent à considérer que c'est seulement à partir de la classe de quatrième (8ème grade) que commence véritablement l'enseignement de l'algèbre. Certes, on introduit les nombres relatifs auparavant, mais c'est seulement avec l'introduction des équations et des fonctions et avec la manipulation des expressions littérales que, pour beaucoup d'enseignants, commence véritablement l'algèbre.

Pourtant, certains modes de représentation et d'écriture comme les égalités à trous, utilisées dès les premières classes de l'école élémentaire, ressemblent étrangement à l'algèbre. Et si l'on considère comme étant de nature algébrique, la tâche qui consiste à mettre un problème en représentation, c'est-à-dire à extraire d'un problème ou d'une situation les relations pertinentes, à en fournir un modèle symbolique, puis à traiter les relations ainsi représentées à l'aide d'une syntaxe propre au système symbolique choisi, alors l'algèbre commence, on peut commencer, dès l'école élémentaire.

A côté de ces continuités, il existe des discontinuités importantes entre l'arithmétique et l'algèbre. L'algèbre représente une double rupture épistémologique : d'une part, l'introduction d'un détour formel dans le traitement de problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable, de monôme et de polynôme.

L'expérience d'enseignement de l'algèbre que je vais évoquer s'adressait à des élèves réputés en échec, élèves écartés du collège à l'issue de la cinquième (7ème grade), scolarisés dans un lycée d'enseignement professionnel.

L'objectif social d'une telle recherche est assez évident puisqu'il s'inscrit dans une perspective d'enseignement de l'algèbre à tous les élèves. Son objectif scientifique est de regar-

[1] Laboratoire PSYDEE, 46 rue Saint Jacques, 75005 PARIS

Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, pp. 189-99

der, avec la loupe grossissante que représente une population d'élèves faibles en mathématiques, certaines difficultés posées par l'introduction de l'algèbre au niveau de l'école secondaire moyenne, en particulier :

- la signification du signe d'égalité,
- l'introduction de procédures mathématiques nouvelles : mise en équation, script-algorithme,
- la fonction de l'algèbre par rapport à l'arithmétique ; la rupture qu'elle représente,
- le sens qu'on peut donner éventuellement à la solution négative d'une équation,
- les notions de système et d'indépendance,
- les notions de fonctionnement de variable, de graphe, de fonction de plusieurs variables.

Cette recherche est inspirée principalement par une conception de l'algèbre comme *outil*, c'est-à-dire comme moyen nouveau de résoudre des problèmes d'arithmétique, que les élèves concernés seraient presque toujours incapables de résoudre par des moyens purement arithmétiques. La perspective de l'algèbre comme *objet* est relativement peu développée. Il aurait fallu une expérimentation plus longue. La distinction outil/objet proposé par Régine Douady nous semble donc ici pleinement valable. Le concept de contrat didactique développé par Guy Brousseau et Maria Luisa Schubauer-Leoni nous est apparu indispensable également. Enfin, les écrits sur l'algèbre de Chevallard d'une part, de Filloy et Rojano d'autre part, nous ont directement influencé, même si nous croyons nécessaire d'introduire des considérations supplémentaires notables.

1. Dans l'utilisation du signe d'égalité à l'école élémentaire, et d'une manière générale dans la résolution des problèmes d'arithmétique élémentaire, le signe d'égalité représente davantage l'annonce d'un résultat que l'existence d'une relation symétrique et transitive.

Bruno est passé chez sa grand-mère qui lui a donné 15 francs ; puis il est allé acheter une voiture miniature qui lui a coûté 32 francs. Il lui reste maintenant 23 francs. Combien d'argent avait-il dans son porte-monnaie avant de passer chez sa grand-mère ?

Solution fréquente en sixième :

$$23 + 32 = 55 - 15 = 40$$

La symétrie et la transitivité du signe d'égalité sont violées. Le signe d'égalité peut être lu comme "ça donne", c'est-à-dire comme une relation fléchée de la gauche vers la droite. Il faut donc, dans une phase d'introduction à l'algèbre, utiliser des situations qui conduisent l'élève à comprendre et à respecter le caractère symétrique et transitif de l'égalité, en même temps qu'il faut introduire les règles élémentaires de manipulation des équations, qui conservent cette égalité.

Le concept de *script-algorithme* renvoie à la forme et au sens des procédures de traitement des équations

- *script* au niveau du signifiant, qui apparaît ainsi comme une bonne forme (gestalt),

par exemple :

$$
\begin{aligned}
4 \times x + 13 &= 37 \\
4 \times x + 13 - 13 &= 37 - 13 \\
4 \times x &= 24 \\
4 \times x / 4 &= 24 / 4 \\
x &= 6 \qquad\qquad S = \{6\}
\end{aligned}
$$

Certains caractères de cette forme sont invariants pour toutes les équations $ax + b = c$ si $a, b, c > 0$ et $c > b$.

- *algorithme* au niveau du signifié, puisque la procédure repose sur le fait que la soustraction d'un même nombre des deux côtés, ou la division par un même nombre des deux côtés conserve l'égalité.

Cette égalité est d'ailleurs l'égalité de deux nombres, égalité vraie sous la contrainte du choix adéquat de la valeur de l'inconnue. D'autres manipulations algébriques impliquent non pas l'égalité de deux nombres mais l'égalité de deux fonctions, vraie pour toute valeur de la variable. Nous ne développerons pas ce point.

2. Dans la première phase de la séquence didactique, nous avons choisi comme situation de référence, l'équilibre de la balance, qui permettait de donner un sens à la fois aux propriétés de symétrie et de transitivité du signe d'égalité, et aux manipulations algébriques permettant de résoudre les équations.

$$
\begin{aligned}
&(1) & x + a &= b \\
&(2) & ax &= b \\
&(3) & ax + b &= c \\
&(4) & ax + b &= cx + d \\
&(5) & a(bx + c) + d &= e(fx + g) + h
\end{aligned}
$$

pour des valeurs positives des paramètres convenablement choisies.

Les trois premières équations ne constituent pas véritablement une approche fonctionnelle de l'algèbre-outil puisque tous les problèmes qu'on peut mettre en équation sous ces formes sont aisément solubles par l'arithmétique et que les manipulations algébriques s'appuient en fait sur les solutions arithmétiques.

La rupture intervient avec l'équation (4)

$$ax + b = cx + d$$

Tout à la fois, elle permet de résoudre des problèmes que les élèves considérés ne sauraient pas en général résoudre par l'arithmétique, et elle demande en même temps une manipulation à laquelle les élèves répugnent : opérer avec une quantité inconnue (soustraire ax ou cx des deux côtés). Nous avons affaire à un paradoxe : c'est justement lorsque l'algèbre devient plus opératoire que l'arithmétique qu'elle est conceptuellement délicate, et c'est à ce moment-là que les élèves, après avoir mis le problème en équation, repartent brusquement à la recherche d'une solution arithmétique, alors qu'ils avaient assez bien assimilé le script-algorithme permettant de traiter les équations de type $ax + b = c$.

Quand on les analyse, on voit que les équations de type $ax + b = cx + d$ expriment en fait des problèmes à plusieurs inconnues : $y = ax + b$, $y' = cx + d$, $y = y'$.

Il se trouve par ailleurs que c'est avec les problèmes de partage inégal ou de répartition inégale, donc avec des problèmes à plusieurs inconnues, que l'algèbre est traditionnellement introduite dans l'enseignement (cf. Chevallard). Bien que ces problèmes se prêtent facilement à l'expression d'une équation à une inconnue, il est peut-être didactiquement intéressant de les écrire dans un premier temps avec deux inconnues. Par exemple :

Deux jumeaux, Jean et Jacques pèsent ensemble 6,250 kilogrammes à la naissance. Jean pèse 0,330 kilogrammes de plus que Jacques. Combien chacun des jumeaux pèse-t-il ?

au lieu de $2x + 0{,}330 = 6{,}250$ écrire

$$\begin{aligned} x + y &= 6{,}250 \\ y &= x + 0{,}330 \end{aligned}$$

Les problèmes de partage inégal ne sont pas aisément solubles par l'arithmétique pour les élèves considérés. D'une manière générale, il semble donc que ce soit pour les situations à plusieurs inconnues que l'algèbre apparaisse comme un outil fonctionnel. Il faudrait, en toute logique, utiliser ces situations dès les premières leçons d'algèbre.

3. Dans tous ces problèmes, balance et partage inégal, comme d'ailleurs dans les problèmes de géométrie utilisant les formules du périmètre et de l'aire du rectangle, les inconnues représentent toujours des grandeurs ou des quantités et sont de ce fait positives. C'est aussi ce qu'exprime la définition de l'algèbre par Lagrange (rapportée par Chevallard) : "l'art de déterminer des inconnues par des fonctions de quantités connues ou qu'on regarde comme connues".

Dans une approche de l'algèbre comme outil, permettant de représenter et résoudre des problèmes d'arithmétique ordinaire, la question se pose pour les élèves d'attribuer un sens à la solution négative d'une équation, puisqu'un nombre négatif ne peut être la mesure d'une quantité. Ceci ne peut être réalisé que par le biais de problèmes dans lesquels l'inconnue est une transformation (diminution ou augmentation), une relation (de plus ou moins, de débit ou de crédit), ou une abscisse (c'est-à-dire une relation à l'origine).

Voici, à titre d'exemples, deux problèmes que nous avons utilisés :

Robert a joué deux parties de billes. Il avait 15 billes au départ. A la fin, il a 27 billes de plus que ce qu'il avait au départ. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie, il a gagné 35 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Un thermomètre indique à 9 heures du matin la température +2 degrés. Or, la température a monté de 11 degrés depuis 3 heures du matin. Quelle température faisait-il à 3 heures du matin ?

Prenons le premier problème : non seulement la solution est un nombre négatif, mais en outre, c'est un problème difficile à résoudre pour les élèves considérés. La mise en équation peut être faite de deux manières :

soit $15 + x + 35 = 15 + 27$

soit directement $x + 35 = 27$

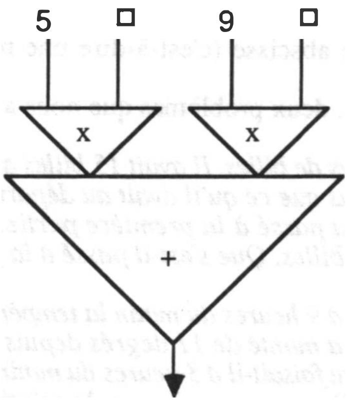
On peut passer d'ailleurs de l'une à l'autre en éliminant 15 des deux côtés, ce qui montre que cette information est inutile. La découverte de la solution $x = -8$ apporte un éclairage nouveau sur les nombres négatifs.

4. Au cours de la deuxième année d'expérience, toujours avec le même groupe d'élèves alors en troisième (9ème grade) nous avons abordé deux autres questions intéressantes de l'enseignement de l'algèbre :

- les fonctions de deux variables, les solutions multiples d'une équation $ax + by = c$, les représentations graphiques ;
- la résolution des systèmes de deux équations et des problèmes représentables par de tels systèmes.

Il est en effet paradoxal que les équations à deux inconnues soient introduites le plus souvent sans que soient évoquées les fonctions de deux variables. Il se trouve en outre que les petites machines programmables permettent aux élèves de manipuler et de représenter de telles fonctions, et cela de plusieurs manières, par exemple algèbre opérateurs

5x +9y



programmes

(x y)	5	x
	RCL Ø	STO Ø
	x	y
	9	STO 1
	RCL 1	RS
	x	
	+	
	programme	instruction d'exécution

On peut alors poser plusieurs types de problèmes

f (x,y) = 5x + 9y f(10,y) = 48	trouver y
f(x,y) = 5x + 9y f(x,y) = 180	Quelles solutions parmi les couples ci-contre : x = 9 y = 15 x = 7 y = 18 x = 2 y = 5 x = 3 y = 6 ... etc.

Représentation graphique : représenter par des points rouges les couples (x,y) qui sont des solutions possibles, et par des points noirs les couples qui ne sont pas des solutions. Que remarquez-vous ?

La résolution des systèmes est présentée à partir d'un exemple de recherche du prix de vente de deux types de livres. L'indépendance des informations contenues dans chacune des équations se traduit par le fait que les graphiques associés aux deux équations

ax + by = c et a'x + b'y = c'

se coupent en un point et un seul.

La résolution par combinaison linéaire et élimination d'une inconnue prend, là encore, la forme d'un script-algorithme. Par exemple :

$$
\begin{array}{lclr}
5x + 12y = 815 & \underset{\longrightarrow}{\times 2} & 10x + 24y & = 1630 \\
10x + 7y = 865 & \underset{\longrightarrow}{\times(-1)} & -10x - 7y & = -865 \\
 & & 17y & = 765 \\
 & & y & = 45
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclr}
5x + 12y = 815 & \underset{\longrightarrow}{\times(-7)} & -35x - 84y & = -570 \\
10x + 7y = 865 & \underset{\longrightarrow}{\times 12} & 120x + 84y & = 10380 \\
 & & 85x & = 4675 \\
 & & x & = 55
\end{array}
$$

Ensuite sont présentés cinq problèmes (annexe 1), représentables par des systèmes de deux équations linéaires, dont la résolution arithmétique est quasiment impossible pour les élèves considérés. La résolution algébrique de ces problèmes peut elle-même être difficile, comme pour le problème j ; le problème k donne une solution négative, qu'il faut interpréter comme une perte. Le problème n' a été résolu par tous les élèves.

5. Il est impossible de présenter, dans le cadre de cet article, les résultats quantitatifs et les observations que nous avons pu recueillir tout au long de la séquence didactique et au cours des tests.

Je voudrais plutôt conclure en présentant quelques réflexions épistémologiques :

L'algèbre représente une rupture par rapport à l'arithmétique puisqu'elle constitue un détour formel : l'arithmétique consiste à choisir de manière intuitive les inconnues intermédiaires ainsi que les données et les opérations à utiliser pour les calculer, tandis que l'algèbre consiste à extraire des relations sans s'engager dans un calcul, puis à traiter de manière quasi-automatique, sans souci du sens, les équations ainsi obtenues.

En outre, l'algèbre demande le plus souvent qu'on manipule des nombres inconnus, ce qui est contre-intuitif : l'élève répugne à raisonner et à opérer sur des nombres inconnus ou sur des nombres quelconques.

En même temps qu'existe cette rupture, on peut observer que l'algèbre, dans la perspective que nous avons adoptée, s'inscrit dans une continuité fonctionnelle avec les acquisitions antérieures : résoudre des problèmes d'arithmétique ordinaire, présentés en langage naturel. D'où les deux questions que nous avions évoquées au début de cet article :

a. Comment les apprentissages et les conceptions antérieurement acquis par les élèves permettent-ils de comprendre les expressions algébriques, et à quelles opérations de pensée supplémentaires leur faut-il accéder pour "faire de l'algèbre" ?

b. N'y a-t-il pas lieu d'envisager un certain enseignement de l'algèbre ou de préalgèbre, tout au long de la scolarité, y compris à l'école élémentaire, pour permettre aux élèves d'aborder avec plus de chances de succès cette rupture épistémologique ?

a. Nous avons donné plus haut l'exemple de l'interprétation du signe d'égalité. Mais on peut donner aussi l'exemple de la signification diverse des signes des opérations, notamment des signes + et -.

Prenons le théorème algébrique :

$a + x = b \Rightarrow x = b - a$

Il correspond à une grande variété de théorèmes-en-acte arithmétiques. Par exemple :

- le complément d'une mesure :

Il y a 22 personnes invitées en tout. 15 sont dans le salon. Combien de personnes se trouvent-elles ailleurs ?

- l'inversion d'une transformation directe positive :

Thierry vient de recevoir 15 francs de sa grand-mère. Il a maintenant 22 francs. Combien avait-il avant ?

- le calcul, par différence, d'une transformation négative :

Paul avait 22 billes. Il en a maintenant 15. Que c'est-il passé ?

Dans ces trois exemples, le sens du signe - est différent, et il diffère en outre du sens primitif de perte ou de diminution que l'enfant donne habituellement à la soustraction :

Emmanuelle avait 22 bonbons ; elle en distribue 15 à ses amis. Combien lui en reste-t-il ?

Le troisième exemple permet de donner un sens à la solution négative d'une équation :

$$\begin{aligned} 22 + x &= 15 \\ x &= 15 - 22 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

et il illustre un théorème : transformation = état final - état initial ,

$$T = F - I$$

différent du théorème impliqué dans la résolution du deuxième exemple.

état initial = transformation inverse appliquée à l'état final

$$I = T^{-1}(F)$$

Les choses se compliquent encore pour l'inversion d'une transformation négative, ou pour la recherche de la transformation qui, combinée avec une autre, donne une composée connue ; nous avons pu le montrer abondamment dans nos recherches passées sur les structures additives :

Thierry a joué deux parties. A la seconde partie, il a gagné 22 billes. en tout, il en a perdu 15. Que s'est-il passé à la première partie ?

$$T_1 \circ T_2 = T_3$$
$$T_1 = T_3 \circ (T2^{-1})$$

En bref, le théorème

$$a + x = b \Rightarrow x = b - a$$

représente la synthèse de plusieurs théorèmes-en-actes différents ou, si l'on préfère, d'opérations de pensée de plusieurs types.

Qui oserait prétendre que cette synthèse peut être faite aisément par les élèves si elle ne fait l'objet d'aucune attention didactique ?

b. En ce qui concerne la préparation à l'apprentissage de l'algèbre, il nous apparaît qu'il y a de sérieux inconvénients à ne pas aborder dès l'école élémentaire un certain nombre de représentations et de concepts algébriques. Je n'évoquerai que trois points mais ils sont importants

- les nombres négatifs, auxquels il est possible de donner du sens, comme transformations ou comme relations dès le cours élémentaire (2ème et 3ème grades) ;
- la représentation par des schémas, notamment par des schémas fléchés, de problèmes de structures diverses, et la manipulation de ces représentations symboliques. Cela peut donner aux élèves une certaine préparation aux manipulations algébriques qu'ils rencontreront plus tard ;
- l'utilisation plus grande des formules de géométrie (périmètre, aire), d'économie quotidienne (prix, bénéfice, répartition...), voire de physique et de technologie, dans l'introduction et l'utilisation de l'algèbre. Avant qu'on l'identifie avec des objets algébriques abstraits, l'algèbre n'est-elle pas un moyen de modéliser le réel ?

ANNEXE 1

i. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 920 mètres. Calculer ses deux dimensions, sachant que la longueur a 20 mètres de plus que la largeur.

j. Une fraction est telle que si on ajoute 1 au numérateur, sa valeur est 1/3 et si on ajoute 1 au dénominateur, sa valeur est 1/4. Quelle est cette fraction ?

k. Un marchand de fruits a vendu, pendant la semaine, 85 cageots de pêches au prix normal et 11, le samedi, au prix réduit. Il a fait 817 francs de bénéfice sur les pêches.

La semaine d'avant, il avait vendu 76 cageots au prix normal et 9 au prix réduit en faisant 733 francs de bénéfice sur les pêches. Le prix normal est le même pendant les deux semaines, le prix réduit du samedi également.
1. Combien gagne t-il par cageot au prix normal ?
2. Le prix réduit représente t-il un gain ou une perte ? De combien ?

l. Deux élèves, Konan et Koffi, discutent. Konan dit : "Dans ma classe, il y a 30 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 3, puis le nombre y de filles par 2 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 85". Koffi lui dit alors : "Dans la mienne, il y a 35 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 2, puis le nombre y de filles par 5 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 55.

Mais un professeur de mathématiques qui les écoute, affirme que ce que dit Konan est vrai et que ce que dit Koffi est faux.

1. Trouve le nombre de garçons et de filles dans la classe de Konan.

2. Pourquoi ce que dit Koffi ne peut-il pas être vrai ?

m. "Donnez moi 2 pains et 1 baguette", dit Jean au boulanger. Et il paie 9,80 francs.

"Oh pardon, dit-il, c'est 2 baguettes et 1 pain qu'il me faut". Le boulanger rend 1 franc à Jean. Combien le boulanger vend t-il son pain et sa baguette ?

REFERENCES

BELL A.W., COSTELLO V., KUCHEMAN D.E., 1983, A review of research mathematical education, part A : *Research on learning and teaching*. Windsor : NFER - Nelson.

BOOTH L.R., 1984, Algebra : children's strategies and errors. Windsor : NFER -Nelson.

CHEVALLARD Y., 1982, Balisage d'un champ de recherche : l'enseignement de l'algèbre au premier cycle. *Seconde Ecole d'été de didactique des mathématiques,* Orléans.

COLLIS K.F., 1975, A study of concrete and formal operations in school mathematics : a piagetian wiewpoint. Melbourne : Australian Council for Educational Research.

DAVIS R.B.,1975, Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *The Journal of Children's Mathematical Behavior, 1,* n° 3.

FILLOY E., ROJANO T., 1984, From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12-13 year old). *Proceedings of the 6th annual meeting of Psychology of Mathematics Education* (North American Chapter). Madison, 51-56.

FILLOY E., ROJANO T., 1985, Obstructions to the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies. *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics*. Noordwijkout, 154-158.

KIERAN C., Cognitive mechanisms underlying the equation-solving errors of algebra novices. *Proceeding of the eight International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Sydney, 70-77.

MATZ M., 1980, Toward a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3* (1), 93-166.

ROSNICK P., CLEMENT ,1980, - Learning without understanting : the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions, *Journal of Mathematical Behavior, 3,* 3-27.

VERGNAUD, G., 1985, Understanding Mathematics at the secondary school level. Bell A., Low B., Kilpatrick J. *Theory, Research and Practice in Mathematical Education. ICME 5,* Nottingham Shell Centre for Mathematical Education.