



Gérard Vergnaud

Recherches en psychologie didactique

Ce document est issu du
site officiel de Gérard Vergnaud

www.gerard-vergnaud.org

Ce document a été numérisé afin de rester le plus fidèle possible à l'original qui a servi à cette numérisation. Certaines erreurs de texte ou de reproduction sont possibles.

Vous pouvez nous signaler les erreurs ou vos remarques via le site internet.

Catégories logiques et invariants opératoires

In Archives de Psychologie Hommage à Pierre Gréco

N° 58
1990, pp.145-149

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1990_Categories-Logiques-Invariants-Operatoires_Archives-Psychologie-58

Ce texte est soumis à droit d'auteur et de reproduction.

CATÉGORIES LOGIQUES ET INVARIANTS OPÉRATOIRES

Gérard Vergnaud
Université René Descartes, Paris

Pierre Gréco était un psychologue amoureux de la logique. J'ai donc recherché dans mes propres préoccupations, celles qui me paraissaient pouvoir faire écho à certaines des siennes.

J'ai retenu trois questions: comment décrire les connaissances implicites dans l'action du sujet en situation? Quelles distinctions de la logique favorisent-elles cette description? Comment faut-il penser la relation entre la logique et les connaissances scientifiques?

Le concept de schème est selon moi le concept le plus important introduit par Piaget pour l'analyse du fonctionnement et du développement cognitifs. Ce sont les schèmes qui rendent compte de l'organisation de l'activité du sujet dans une situation donnée. Si cette situation appartient à une classe de situations bien maîtrisées par le sujet, le schème peut être défini comme l'organisation invariante de la conduite pour cette classe de situations; si au contraire cette situation est nouvelle pour lui et qu'il ne dispose pas d'emblée des compétences nécessaires pour la traiter, le sujet va adopter ou esquisser des conduites qui sont fonction des parentés qu'il voit ou croit voir entre la situation nouvelle et celles qui lui sont plus familières. On observe alors un certain va-et-vient entre schèmes, des décombinaisons et recombinaisons d'éléments empruntés à plusieurs schèmes, et des découvertes *in situ*, avec l'aide d'autrui éventuellement. Ce sont ainsi les schèmes qui sont au centre du processus d'adaptation des structures cognitives aux situations rencontrées. Ce sont eux encore qui permettent de caractériser le plus complètement les différentes étapes du développement cognitif dans un champ conceptuel donné.

Le schème est une totalité dynamique organisée et fonctionnelle. Il n'en faut pas moins l'analyser. Ses composantes les plus universellement reconnues, dans la psychologie cognitive contemporaine sont: les règles d'action qui permettent d'engendrer la suite des actions du sujet en fonction des valeurs prises par les variables de situations; les anticipations, attentes ou prédictions qui permettent de rendre compte à la fois de la représentation du but à atteindre et des opérations de planification et de contrôle.

On reconnaît moins universellement dans la communauté scientifique que les règles d'action et les anticipations reposent fondamentalement sur

une représentation du réel, qui peut être adéquate ou pas pour les besoins de l'action engagée, et qui suppose en tout état de cause des conceptualisations explicites ou implicites, correctes, incorrectes ou partiellement correctes.

Je propose d'appeler «invariants opératoires» les connaissances du sujet qui sont sous-jacentes à ses conduites, et qui sont donc partie intégrante de ses schèmes d'action. Ce sont ces invariants opératoires qui forment les catégories avec lesquelles le sujet prélève dans l'environnement les informations pertinentes pour son action; il les fait entrer dans les calculs inférentiels qui lui permettent de générer, consciemment ou inconsciemment, règles d'actions, actions et anticipations.

L'opérationnalité de ces catégories dépend évidemment du succès et des limites qu'elles ont rencontrés dans l'expérience antérieure du sujet et des «théorèmes» auxquels elles sont associées. Pertinence et calculabilité sont en effet les critères essentiels de la pensée lorsqu'on la considère à travers l'action opératoire. Les inférences sont indispensables à la mise en œuvre du schème dans chaque situation particulière: le schème n'est pas un stéréotype mais une fonction temporalisée à arguments, qui permet de générer des suites différentes d'actions et de prises d'informations en fonction des variables de situation. Le schème est un universel: il s'adresse le plus souvent à une classe infinie de situations possibles.

À la lumière des recherches sur l'apprentissage des mathématiques, je voudrais distinguer trois types fondamentalement différents d'invariants opératoires, en m'appuyant pour cela sur la logique.

Des invariants de type «propositions»: ils sont susceptibles d'être vrais ou faux; les théorèmes-en-acte sont des invariants de ce type.

Premier exemple: entre cinq et sept ans, les enfants découvrent qu'il n'est pas nécessaire de recompter le tout pour trouver le cardinal de $A \cup B$ si l'on a déjà compté A et compté B . On peut exprimer cette connaissance par un théorème-en-acte:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \\ \text{pourvu que } A \cap B = \emptyset.$$

L'absence de quantificateur laisse entendre que ce théorème n'a pas une validité universelle pour les enfants, mais une portée seulement locale, pour les petites collections par exemple.

On observe ainsi que les enfants passent de la procédure «recompter le tout» à la procédure «compter en avant à partir du cardinal du premier ensemble», économisant ainsi l'opération $\text{Card}(A \cup B)$.

Deuxième exemple: entre huit et dix ans, avec un bonheur variable selon les individus, beaucoup d'élèves comprennent que si une quantité d'objets marchands est multipliée par 2, 3, 4, 5, 10, 100 ou un nombre simple, alors le prix est 2, 3, 4, 5, 10, 100 fois plus grand. On peut exprimer cette connaissance par un théorème-en-acte:

$$f(nx) = nf(x) \text{ pour } n \text{ entier et simple.}$$

Des invariants de type «fonction propositionnelle»: ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Par exemple les concepts de cardinal et de collection, ceux d'état initial, de transformation et de relation quantifiée, sont indispensables à la conceptualisation des structures additives. Ce ne sont pas des propositions.

Ces concepts sont rarement explicités par les élèves, alors même qu'ils sont construits par eux dans l'action: ce sont des concepts-en-acte, ou des catégories-en-acte. Le type logique des concepts-en-acte est fondamentalement différent du type logique des théorèmes-en-acte: les premiers sont des fonctions propositionnelles, les seconds des propositions. La relation entre fonctions propositionnelles et propositions est une relation dialectique: il n'y a pas de proposition sans fonctions propositionnelles et pas de fonction propositionnelle sans propositions. De la même manière concepts-en-acte et théorèmes-en-acte se construisent en étroite interaction.

Parmi les fonctions propositionnelles, il faut en premier lieu considérer qu'il existe des fonctions à un argument (les propriétés), des fonctions à deux arguments (les relations binaires), des fonctions à trois arguments (les relations ternaires, parmi lesquelles les lois de composition binaires), des fonctions à quatre arguments, comme dans la proportionnalité, et des fonctions à plus de quatre arguments.

On peut ainsi écrire $P(x)$ la fonction propositionnelle «... est bleu», $R_2(x, y)$ la relation «... est à droite de ...», $R_3(x, y, z)$ la relation «... est entre ... et ...» ou la loi de composition «la somme de ... et ... est ...».

Cette distinction entre propositions et fonctions propositionnelles est indispensable. Pourtant elle ne rend pas compte à elle seule de tous les aspects importants du processus de conceptualisation. Les concepts de couleur, de direction et de sens sont à l'évidence d'un autre type logique que les concepts de bleu et de droite. On peut considérer par exemple que l'ensemble des couleurs est l'ensemble-quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence «a la même couleur que». Il faut alors considérer que le concept de couleur procède de la construction d'un descripteur par mise en relation des valeurs particulières qu'il peut prendre. Mais que penser des concepts de chaleur, de force, de fonction, de variable? Il y a là une voie de recherche théorique très importante.

Des invariants de type «argument»: qui dit fonction propositionnelle et proposition dit argument. Les logiciens classiques avaient l'habitude de prendre leurs exemples dans les objets matériels ordinaires et leurs propriétés. Étaient alors arguments a, b, c (instanciations des variables x, y, z) des objets matériels comme le livre, la table, le personnage Paul, et fonctions propositionnelles des propriétés et des relations P, R_2, R_3 comme celles que nous avons vues plus haut. Par exemple, «Paul pose le livre sur la table» peut s'inscrire: $R_3(Paul, livre, table)$, proposition qui résulte de l'instanciation des arguments de la fonction propositionnelle $R(x, y, z)$ «x pose y sur z» dans

laquelle x est une personne, y un petit objet matériel manipulable et z un support possible.

En mathématiques, les arguments peuvent être des objets matériels (le sel est à côté du poivre), des personnages (Paul est plus grand que Céline), des nombres ($4+3=7$), des relations («plus grand que» est une relation antisymétrique), et même des propositions («8 est un diviseur de 24» est la réciproque de «24 est un multiple de 8»).

Cette discussion n'aurait que peu d'intérêt pour la psychologie si la transformation des concepts-outils en concepts-objets n'était pas un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres que les fonctions propositionnelles peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation. C'est ainsi que beaucoup des propriétés et des relations laborieusement discernées par l'enfant au cours de son expérience deviennent, éventuellement, après un temps plus ou moins long, des catégories marquées du sceau de l'évidence, ayant elles-mêmes des propriétés communes et des relations avec d'autres catégories, et associées à des formes langagières univoques.

La recherche contemporaine accorde une importance de plus en plus grande à la spécificité des connaissances, dans l'étude du fonctionnement et du développement cognitifs. Beaucoup de chercheurs ne croient plus qu'il soit possible de réduire à des structures logiques les opérations de pensée du sujet en situation, et les conquêtes intellectuelles qu'il fait au cours de son expérience, développement et apprentissage mêlés. La place la plus déterminante est occupée par les processus de conceptualisation, avec les spécificités qui sont attachées à ces processus dans chaque domaine d'expérience et dans chaque champ conceptuel.

Mais la logique fournit des instruments précieux d'analyse pour la clarification des problèmes. Même s'ils se développent ensemble, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte ne sont pas de même nature: les premiers sont des fonctions propositionnelles, les seconds des propositions. D'autre part le même concept peut avoir une valeur d'outil de pensée, ou une valeur d'objet de pensée, et de ce fait il entre dans des calculs de nature et de niveau différents.

La logique ne nous offre pas seulement des domaines de conceptualisation d'un type particulier comme par exemple la logique des classes: champ conceptuel dans lequel on peut tracer la genèse de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte au même titre que dans d'autres champs conceptuels bien repérés aujourd'hui, comme les structures additives, les structures multiplicatives ou la mécanique. La logique nous offre aussi des distinctions essentielles entre prédicats à une, deux ou plusieurs places, ou entre types logiques: l'ensemble des objets d'un certain type ne peut pas être du même type que les objets qu'il regroupe. J'ai essayé de montrer dans ces quelques pages que la logique nous permet également d'éclairer les problèmes théoriques posés par la conceptualisation implicite du réel sous-jacente à l'action opératoire, problèmes sur lesquels règne aujourd'hui une grande confusion. Le plaisir ne m'est hélas plus permis de discuter de cela avec Pierre Gréco, dont le

souci de clarté et de rigueur théoriques seront toujours pour moi une référence.

RÉSUMÉ

Notre réflexion montre que la transformation des concepts en tant qu'outil de pensée en concepts en tant qu'objet de pensée est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. La logique permet d'éclairer les problèmes théoriques posés par la conceptualisation implicite du réel sous-jacente à l'action opératoire.

SUMMARY

We argue that when concepts (instruments of thought) become in themselves objects of thought, a decisive step is taken in the process of the conceptualization of reality. The theoretical problems concerning the implicit conceptualization of reality underlying the operatory actions can be clarified by logic

ZUSAMMENFASSUNG

Die Transformation der Konzepte von «Werkzeugen» des Denkens zu «Objekten» des Denkens ist ein entscheidender Prozess in der progressiven Konzeptualisierung der Wirklichkeit. Die Logik trägt dazu bei die theoretischen Probleme dieser impliziten Konzeptualisationen aufzuklären.

*Adresse de l'auteur:
Laboratoire de Psychologie du Développement
et de l'Éducation de l'Enfant (Psydee)
CNRS · Université René Descartes
Groupement de Recherche Didactique
46, rue Saint-Jacques
F-75005 Paris*