Les quatre opérations de l'arithmétique sont-elles quatre ?

In Les Entretiens Nathan. Enseigner, Apprendre, Comprendre
Actes IV

Paris, Nathan (Ed.)
1994, pp.163-180

ENSEIGNER, APPRENDRE, COMPRENDRE

Sous la direction
d'Alain Bentolila

ACTES IV

les entretiens nathan

NATHAN
pédagogie

Gérard Vergnaud
Directeur de recherche au CNRS

Les quatre opérations de l'arithmétique sont-elles quatre ?

Si l'on en croit les déclarations politiques à l'Assemblée nationale et si l'on examine les thèmes abordés par les entretiens Nathan au cours des années précédentes, l'enseignement des mathématiques est un lieu de débat moins agité que celui de la lecture. On pourrait presque dire : c'est le pays du matin calme. De ce fait un chercheur peut être amené, non pas à calmer le jeu et à rassurer, mais au contraire à jouer les trouble-fête et à montrer que, derrière les choses qui semblent aller de soi, se cachent des problèmes très délicats : il peut notamment être amené à montrer que l'apprentissage des mathématiques est un cheminement long et laborieux et passe par des conceptualisations d'une grande diversité, dont les parents d'élèves, les ministres, et même les enseignants, n'ont qu'une faible idée.

Il y a quelques années, une enquête assez complète a été faite auprès des enseignants de l'école élémentaire, aux États-Unis. Parmi les questions qui étaient posées, l'une d'elles était libellée de la manière suivante : parmi les disciplines que vous avez étudiées, quelle est celle qui vous a donné le plus de difficultés quand vous étiez vous-même élève ou étudiant ? Réponse majoritaire : les mathématiques ! Dans une autre partie du questionnaire se trouvait une autre question : qu'est-ce que vous trouvez le plus facile à enseigner à l'école élémentaire ? Réponse majoritaire : les mathématiques ! Cette contradiction est le signe d'un malentendu. Les enseignants considèrent les mathématiques comme quelque chose de facile à enseigner parce qu'il y a des algorithmes, parce qu'il y a des actions à montrer et à faire reproduire par les élèves, mais derrière cette opinion se cache une grande ignorance des problèmes qui se posent aux élèves. Certes les maîtres savent que les mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre les quatre opérations ; ils savent notamment que la résolution de problèmes est une dimension importante de l'apprentissage ; mais ils n'en mesurent pas pour autant la portée.

Les quatre opérations sont-elles quatre ? Poser la question de cette manière, c'est naturellement appeler la réponse NON, mais alors se pose une autre question : si elles ne sont pas quatre, que sont-elles ? Ce que je vais montrer, c'est que les compétences arithmétiques des enfants ne consistent pas seulement dans les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division de deux nombres écrits sur le papier avec le code de la numération de position, mais également, et de manière essentielle, dans les raisonnements nécessaires au choix des bonnes données et de la bonne opération.

Les exemples que je vais utiliser sont assez simples et ont été choisis pour les besoins de l'analyse et de la démonstration. Cette simplicité ne préjuge pas de l'organisation dans la classe des activités mathématiques. On peut alors disposer de plus d'informations que nécessaire, ou de moins d'informations ; l'élève peut devoir recourir et formuler lui-même les questions possibles ; le raisonnement mathématique peut être une étape et une étape seulement d'une activité plus vaste, par exemple d'une étude ou d'une enquête assez longue des enfants sur leur environnement. Il reste que, en dernier ressort, l'enfant doit, pour répondre à une question et déterminer les données et les opérations pertinentes, disposer de compétences d'une richesse et d'une portée largement sous-estimées aujourd'hui. C'est à l'analyse de ces compétences que je me suis attaché depuis vingt ans ; je l'ai fait avec les choix théoriques d'un psychologue cognitiviste, soucieux d'analyser au plus près les conduites des enfants en situation, et soucieux de mieux comprendre le développement des compétences des élèves sur une longue période de temps, puisque aussi bien on sait que les apprentissages commencés à l'école élémentaire ne sont pas achevés et se prolongent au collège, au lycée, à l'université et dans la vie professionnelle.

La référence à la psychologie cognitive n'a pas la même signification pour tous les chercheurs. En ce qui me concerne, il s'agit de découvrir, dans une compétence nouvelle, la connaissance qui fait la différence d'avec les compétences antérieures. Quelles connaissances implicites font la différence entre la réussite et l'échec, entre telle procédure de réussite et telle autre, entre telle procédure erronée et telle autre, entre la réussite à tel problème et la réussite à tel autre problème. Pour « dénicher » ces connaissances implicites, il faut faire appel à la fois à la psychologie, aux mathématiques et à leur épistémologie. Je montrerai qu'il existe de belles et bonnes mathématiques dans les raisonnements intuitifs des enfants.

Cette manière de voir n'est pas propre aux mathématiques. Dans les compétences langagières des enfants et des adultes, dans les savoir faire des opérateurs sur machine, dans l'expertise des grands ingénieurs et des managers, on devrait rechercher davantage les connaissances critiques qui font de telle opération ou de tel raisonnement une réponse adéquate à la situation. C'est aussi en s'appuyant sur les compétences déjà acquises qu'on peut aider l'enfant ou l'adulte en formation à formuler ses connaissances intuitives, à en élargir la portée, à mieux délimiter leur domaine d'efficacité, à développer de nouvelles compétences. Les enjeux pratiques et théoriques de cette approche sont considérables, y compris pour les compétences sociales et affectives, c'est-à-dire pour ce qui fait notre capacité à vivre et à travailler avec autrui.

Dans le domaine des mathématiques, des sciences et des techniques, on a trop coutume de considérer que le savoir de référence réside dans les manuels et les traités, dans les projets et les règles élaborés par les concepteurs. Cela n'est que partiellement vrai, et cette vision du savoir comme ensemble de propositions et de textes explicites doit être complétée par une vision qui fasse leur part aux compétences des hommes et des femmes en situation effective de travail et de raisonnement. Il nous faut donc un cadre théorique plus complet, pour penser à la fois l'acquisition des compétences privées et non aisément formulables, et l'acquisition des connaissances publiques et explicites. À dire vrai, la culture est faite des unes et des autres. Et l'École a pour fonction de transmettre les unes et les autres. Elle peut ne pas remplir sa mission si elle méconnaît les compétences développées ou susceptibles d'être développées par les élèves. C'est une préoccupation de cet ordre qui a conduit les chercheurs français en didactique des mathématiques, à la suite de Guy Brousseau principalement, à rechercher les situations d'action, de formulation et de preuve susceptibles d'être proposées aux élèves. On sait en effet aujourd'hui que la formation des compétences est gouvernée par une logique d'adaptation aux situations rencontrées.

Cette adaptation n'est pas le résultat de l'action du seul sujet apprenant : le maître et les pairs, les parents et les frères et sœurs apportent des aides à tout moment. Encore faut-il bien voir qu'une compétence n'est opératoire pour un individu que s'il en contrôle lui-même les conditions de mise en œuvre.

Dans la suite de mon exposé, je serai très réducteur puisque je ne prendrai en charge que les aspects mathématiques des situations, alors que dans les conduites des élèves interviennent beaucoup d'autres compétences. Lorsque le maître organise une situation pour faire travailler les élèves sur la proportionnalité, ces derniers entrent dans la situation avec tout leur répertoire de compétences (mathématiques, langagières, sociales, etc.), et c'est ce répertoire qui se développe. J'opère donc une réduction draconienne lorsque je limite mon analyse aux aspects mathématiques.

Prenons un exemple :

> *Il faut 120 kg de blé pour faire 100 kg de farine. Combien peut-on faire de farine avec 972 000 kg de blé ?*

Ce n'est pas le même schème qui permet à un élève de décider qu'il va diviser 972 000 par 120 et d'effectuer ensuite la division avec la procédure qu'on lui a enseignée.

Pour décider de diviser 972 000 par 120, il faut avoir compris, dans la relation de proportionnalité ci-dessous :

Calcul relationnel

$$\begin{array}{ccccc} & \text{blé} & & \text{farine} & \\ & 120 & & 100 & \\ \times\lambda & \downarrow & & \downarrow & \times\lambda \\ & 972\,000 & & \square & \end{array}$$

que la découverte du rapport λ entre 120 et 972 000 permettra de calculer la quantité de farine inconnue, en multipliant 100 kg de farine par λ. C'est un calcul relationnel. La connaissance nécessaire pour ce raisonnement est que :

$$f(\lambda.120) = \lambda.f(120)$$

C'est un théorème des fonctions linéaires :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Pour mener à bien l'algorithme de division, il faut d'autres connaissances et d'autres règles : principalement les règles de décomposition de la numération décimale de position. C'est un calcul numérique.

Calcul numérique

$$\begin{array}{r|l} 972\,000 & 120 \\ \cline{2-2} -96 & 8\,100 \\ 012 & \\ -\ 12 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Les actions successives d'élimination du zéro du diviseur et du dernier zéro du dividende, de produit partiel des premiers chiffres du quotient par le diviseur, de reste partiel, etc., n'ont pas de rapport avec les connaissances-en-acte qui ont permis à l'élève de choisir la bonne opération.

De même, les difficultés possibles sont différentes. Dans le cas du choix de l'opération, on peut créer de sévères difficultés aux élèves en remplaçant 972 000 kg par 96 kg. En effet, il faut alors diviser 96 par 120, ce qui contredit la conception spontanée des élèves qu'on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit. Dans le cas de l'algorithme, c'est la présence d'un zéro au diviseur ou au quotient qui est la principale occasion d'échec à la fin de l'école élémentaire et au début du collège (Guiet, thèse en cours) : par exemple en remplaçant 972 tonnes par 962 400 kg, on rencontre le problème du zéro au deuxième chiffre du quotient.

Pour aller rapidement à des aspects essentiels, je dirai que ces deux compétences ne résultent pas du même schème mais de deux schèmes distincts. J'entends par « schème » une certaine organisation de la conduite, qui consiste : 1) en buts, sous-buts et anticipations, 2) en règles d'actions, 3) en invariants opératoires, c'est-à-dire en instruments de sélection et de traitement de l'information, 4) en possibilités d'inférences et de calcul en situation.

Le but du premier schème est de choisir les données et l'opération à faire ; il existe d'autres procédures que celle rapportée ici, par exemple le produit en croix ou la division de 100 par 120. Le but du second schème est de trouver le quotient de deux nombres écrits en numération décimale de position ; l'algorithme serait différent si les nombres étaient écrits en numération romaine, en base quatre, ou bien encore si l'élève disposait d'une calculette.

La sélection et le traitement de l'information pertinente ne sont pas non plus les mêmes. Dans le premier schème, l'instrument principal de sélection est le concept de rapport scalaire entre grandeurs de même nature et le théorème-en-acte indiqué plus haut

$$f(\lambda\, 120) = \lambda\, f(120).$$

Si l'élève avait choisi de diviser 100 par 120, ce sont d'autres connaissances qui auraient piloté la prise d'information et son traitement : soit la recherche du coefficient de proportionnalité entre quantités de farine et de blé,

$$a = \frac{f(x)}{x} = \frac{100}{120}$$

soit encore la recherche de la valeur unitaire $f(\lambda) = \frac{f(x)}{x}$.

Dans le second schème la sélection de l'information se fait à plusieurs reprises, au fur et à mesure que la procédure se déroule, en considérant en priorité les chiffres les plus grands du dividende et du diviseur, de manière à déterminer d'abord le chiffre le plus significatif du quotient, et ainsi de suite.

La sélection de l'information pertinente est l'une des opérations les plus importantes dans un schème. Quand nous roulons à 120 km à l'heure sur l'autoroute, nous ne sélectionnons qu'une très petite partie de l'information disponible. De même, quand nous communiquons avec autrui, nous ne communiquons qu'une très petite partie de l'information qui serait nécessaire pour faire un tableau exhaustif de la situation et de nos intentions ; nous laissons à la charge d'autrui une part considérable du travail d'interprétation. Cela est vrai à l'école comme au travail, comme d'ailleurs dans les relations affectives.

L'algorithme de la division porte le nom d'algorithme parce qu'il aboutit en un nombre fini de pas au résultat recherché (avec une approximation qui peut être décidée à l'avance). En outre il porte sur des symboles, et l'on a fâcheusement tendance à réserver aujourd'hui le terme d'algorithme aux opérations sur les symboles. En fait les algorithmes sont des schèmes et la manipulation des symboles est gouvernée par des connaissances qui sont loin d'être toutes explicitées, même par les enseignants. Les schèmes qui permettent de choisir les données et l'opération pertinentes laissent encore davantage dans l'ombre les connaissances mathématiques sur lesquelles repose leur efficacité : notamment les différentes propriétés de la fonction linéaire, de la fonction bilinéaire, ou encore l'analyse dimensionnelle.

Ce sont ces connaissances implicites que je désigne par l'expression d'« invariants opératoires » : ce sont pour l'essentiel des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte. La psychologie cognitive et la didactique doivent entre autres se donner pour tâche d'analyser les théorèmes-en-acte sous jacents aux conduites des élèves, telles qu'on peut les observer en situation.

Un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie sur le réel par le sujet : ce sont les théorèmes-en-acte qui permettent de comprendre la spécificité d'une conduite par rapport à une autre, ou au contraire leur ressemblance.

Les structures additives

Pour montrer que cette question des théorèmes-en-acte et des concepts-en-acte se pose dès les premiers apprentissages mathématiques, je vais prendre des exemples plus simples, dans ce qu'il est maintenant convenu d'appeler le champ conceptuel des structures additives.

Prenons un premier problème :

> *Josette vient de dépenser 7 francs pour acheter un gâteau. Il lui reste 12 francs. Elle se demande combien elle avait avant d'acheter son gâteau.*

La solution est une addition, mais ce n'est pas une addition naturelle pour les jeunes enfants. En effet, l'idée de dépense véhicule plutôt l'idée de diminution et de soustraction, de même que l'idée de gain véhicule celle d'augmentation et d'addition. Or il faut ajouter les 7 francs dépensés aux 12 francs de l'état final. Pour décider de cette opération, une connaissance est nécessaire : si une diminution fait passer de l'état initial à l'état final, c'est une augmentation qui permet de revenir de l'état final à l'état initial. S'il faut une soustraction dans un sens, il faut une addition dans l'autre.

Cette difficulté n'est pas très durable, et elle est en général levée chez presque tous les enfants de CE2 à la fin de l'année scolaire. Par contre c'est une difficulté presque insurmontable pour une proportion importante des enfants de CP et de CE1. Pourquoi ? D'abord parce que dès l'âge de trois ou quatre ans, les enfants développent des conceptions de l'addition et de la soustraction qui ne correspondent pas du tout à cette situation. Il existe deux conceptions primitives de l'addition : la réunion de deux parties en un tout (opération binaire commutative) et la transformation d'un état initial par une augmentation (opération unaire non commutative dans laquelle un nombre relatif positif opère sur un nombre naturel). Il n'existe qu'une conception primitive de la soustraction, la transformation d'un état initial par diminution.

Ce sont d'ailleurs ces modèles prototypiques qui ressortent chez les adultes, y compris chez les étudiants de sciences de l'éducation et de psychologie, lorsqu'on leur demande d'imaginer des problèmes d'addition et de soustraction. Il n'est pas fréquent qu'un exemple de recherche d'état initial soit spontanément donné par un étudiant, fût-il enseignant.

Le traitement des situations prototypiques d'addition et de soustraction contribue à la formation de conceptions qui peuvent ensuite faire obstacle, pendant une certaine période, à la découverte de la bonne opération dans les situations non prototypiques.

Il y a plus grave. Voici un deuxième exemple.

> *Thierry a joué aux billes le matin et l'après-midi. L'après-midi, il a perdu 12 billes, mais quand il recompte ses billes le soir, il s'aperçoit que, au total, il a gagné 7 billes au cours de la journée. Que s'est-il passé le matin ?*

La plupart des adultes ne sont pas d'emblée à l'aise avec un tel problème, et se sentent obligés de réfléchir. La solution ne demande pourtant qu'une addition : il faut ajouter les billes perdues au cours de l'après-midi et les billes gagnées en tout pour retrouver ce qui a été gagné le matin. Or, quand on a deux parties (donc deux transformations), qu'on connaît la transformation composée et ce qui s'est passé à la deuxième partie, on soustrait habituellement la seconde transformation de la transformation composée pour trouver la première. Ici, il faut faire une addition. Cette addition est totalement contre-intuitive, et traduit en fait la soustraction de deux nombres relatifs de signe contraire :

$$(+7) - (-12) = \square$$

Il suffit de changer les valeurs numériques pour que le problème devienne trivial, en tout cas pour la plupart des élèves de CM2 et de 6ᵉ.

> *Thierry a joué aux billes le matin et l'après-midi. L'après-midi, il a perdu 12 billes, mais quand il recompte ses billes le soir, il s'aperçoit que, au total, il a perdu 18 billes au cours de la journée. Que s'est-il passé le matin ?*

Ce dernier énoncé de problème se laisse en effet modéliser facilement par une relation de type partie-partie-tout malgré le fait qu'il s'agisse de pertes. En effet, le tout et la partie sont de même signe, et le tout est, en valeur absolue, plus grand que la partie : perdu 12, perdu 18, la différence est encore une perte, et il n'y a pas d'obstacle à utiliser le schème du complément de 12 à 18, ou de la différence entre 18 et 12. On mesure avec cet exemple que la complexité du texte n'est pas le problème principal, et qu'on a trop vite fait de désigner les difficultés des élèves par des problèmes de lecture. Il s'agit de conceptualisation, et la lecture est elle-même gouvernée par la conceptualisation : lire c'est comprendre. Encore faut-il en avoir les moyens conceptuels.

Les difficultés des élèves se nichent dans des endroits auxquels on ne pense pas toujours.

Abordons maintenant la question des représentations symboliques utilisées ou utilisables à l'école élémentaire, et reprenons pour cela l'exemple du problème vu plus haut.

> *Josette vient de dépenser 7 francs pour acheter un gâteau. Il lui reste 12 francs. Elle se demande combien elle avait avant d'acheter son gâteau.*

Voici trois systèmes de représentations possibles :

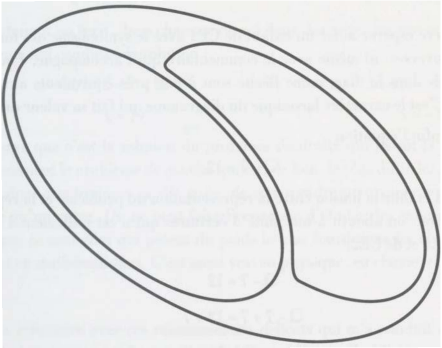
$$\square - 7 = 12$$

Cette mise en équation est assez couramment utilisée au CE1 et au CE2

$$\square \xrightarrow{-7} 12$$

Ce diagramme fléché est aussi une sorte de mise en équation, il a l'avantage de bien mettre en évidence les trois termes de la relation : état initial, transformation, état final.

On peut enfin essayer de représenter le problème avec des diagrammes d'Euler Venn, qui sont couramment utilisés à l'école élémentaire.



Je dis bien « essayer », parce qu'en fait il est impossible, avec ce type de diagramme, de représenter le problème « Josette ». On peut certes représenter la solution, parce que c'est une addition, mais pas le problème ; et si l'on a déjà la solution, le diagramme n'a pas véritablement de fonction.

Pourquoi ne peut-on pas représenter le problème «Josette» ? Parce que le problème comporte une donnée négative (dépense de 7 francs) et que la sémantique du système Euler Venn ne permet pas de représenter les transformations et relations négatives. Un système bien adapté pour les relations partie-tout s'avère être un obstacle pour la représentation des transformations.

Si l'on considère maintenant le diagramme fléché, il est relativement facile de représenter le lien entre la représentation du problème et la représentation de la solution.

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "-7"] & 12 \arrow[l, bend left, dashed, "+7"] \end{tikzcd}$$

La flèche en pointillés de retour à l'état initial est affectée du nombre opposé au nombre associé à la transformation directe. C'est une représentation parfaitement accessible aux enfants de CE1 et de CE2. Elle traduit le théorème-en-acte

$$F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$$

Si l'état final résulte de l'application de la transformation T à l'état initial, alors l'état initial résulte de l'application à l'état final de la transformation opposée (ou inverse).

On ne peut guère espérer aider un enfant de CE1 avec le symbolisme des fonctions et des fonctions inverses, ni même avec le commentaire qui l'accompagne. Pourtant les symboles utilisés dans le diagramme fléché sont à peu près équivalents aux mots du commentaire. C'est le caractère laconique du diagramme qui fait sa valeur didactique.

Si l'on prend enfin l'équation

$$\square - 7 = 12$$

et qu'on tente d'établir la liaison entre la représentation du problème et la représentation de la solution, on aboutit à une suite d'écritures qui n'est nullement à la portée des élèves de CE1 et de CE2.

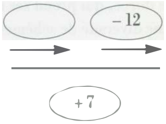
$$\square - 7 = 12$$

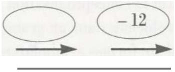
$$\square - 7 + 7 = 12 + 7$$

En d'autres termes, la représentation par une équation ne permet nullement de piloter et de contrôler la résolution du problème : les élèves ne peuvent que deviner qu'il faut ajouter 7 et 12, ou bien procéder par essais et erreurs en donnant au carré blanc des valeurs successives. L'équation n'est pas, pour les élèves de CE1 et de CE2, une représentation opérationnelle.

Tentons maintenant de représenter les deux problèmes « Thierry » ; on dispose là encore de plusieurs possibilités.

Une première possibilité consiste à représenter par un diagramme fléché les deux transformations successives et leur composée :





Une autre consiste à écrire des équations avec un symbolisme propre aux nombres relatifs, des parenthèses par exemple :

$$x + (-12) = (+7) \qquad\qquad x + (-12) = (-18)$$

Un troisième consiste à utiliser un symbolisme banal, sans parenthèses :

$$x - 12 = 7 \qquad\qquad x - 12 = -18$$

Si maintenant on écrit, dans chacune de ces deux dernières représentations, le chemin algébrique qui conduit à la solution :

$$x - 12 + 12 = 7 + 12 \qquad\qquad x - 12 + 12 = -18 + 12$$

$$x = 19 \qquad\qquad x = -6$$

on observe que c'est la solution du problème de droite qui paraît la plus délicate. Or c'est justement le problème de gauche qui est, de loin, le plus difficile. L'algèbre ne nous permet donc pas toujours, à elle seule, de comprendre pourquoi un problème est plus difficile qu'un autre. On ne peut faire l'économie d'étudier les conceptions des élèves, parce que ce sont elles qui pèsent du poids le plus lourd dans les obstacles qu'ils rencontrent en mathématiques. C'est aussi vrai en physique, en chimie, en biologie.

C'est la rencontre avec ces raisonnements délicats qui m'a conduit à classer les relations de base pouvant donner lieu à des problèmes d'addition et de soustraction (Vergnaud, 1981). J'ai ainsi abouti à six relations, dont chacune peut donner lieu parfois à deux catégories de problèmes, parfois à six, parfois davantage encore. Certains de ces problèmes sont à la portée des enfants de cinq ans, pour de très petites valeurs numériques et pour des domaines d'expérience familiers aux enfants ; certains autres ne sont guère réussis avant le cours moyen ; d'autres enfin mettent en échec la majorité des élèves de troisième… et beaucoup d'adultes. Par exemple, on rencontre des relations délicates à comprendre en comptabilité, notamment pour l'interprétation du passif et de l'actif d'un bilan ; les étudiants de physique eux-mêmes ont des difficultés pour traiter les interactions entre systèmes. L'addition et la soustraction comportent encore certains mystères pour les universitaires ; s'ils ne sont pas vigilants, ils se trompent.

C'est cela la conceptualisation ! Un processus de longue durée, qui prend ses aliments et ses problèmes dans un grand nombre de situations, une diversité de schèmes, et une diversité de formes symboliques et langagières. Cela m'a conduit à définir un concept comme un triplet de trois ensembles

Concept = (S, I, R)

S : ensemble des situations qui donnent du sens au concept.
I : ensemble des invariants opératoires sur lesquels repose l'efficacité des schèmes.
R : ensemble des représentations langagières et symboliques qui permettent de représenter le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

Concernant les formes langagières, sur lesquelles j'ai fait peu de commentaires, je donnerai comme exemple le fait que, pour indiquer le déroulement temporel dans une situation de type état initial, transformation, état final, on dispose en français de plusieurs moyens :

- l'ordre d'énonciation
- le temps contrasté des verbes : imparfait/présent ou présent/futur, etc. ;
- les adverbes de temps : avant, après, maintenant, plus tard, etc. ;

Or, on peut aussi énoncer les informations dans un ordre qui contredit l'ordre temporel, se passer des adverbes de temps ou des oppositions dans les temps des verbes. Si l'on supprime tous ces indices à la fois, le texte devient inintelligible ; mais on peut souvent supprimer certains d'entre eux sans grave dommage pour la compréhension du texte. Le langage est redondant ; nos schèmes de compréhension des textes peuvent fonctionner avec des indices juste suffisants. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les enfants.

Le symbolisme a cette vertu qu'il permet assez aisément de transformer en objet de pensée, ce qui n'était, sans le symbolisme, qu'un outil de catégorisation des informations. Les marques langagières sont des outils pour discriminer les positions des éléments dans une relation. Il faut souvent une opération de nominalisation pour changer le statut cognitif d'un élément : par exemple l'énoncé « Josette a maintenant 12 francs » n'est pas conceptuellement équivalent à l'énoncé « l'état final est 12 francs ».

Le diagramme fléché permet de désigner comme des objets distincts l'état initial, la transformation et l'état final. Ce faisant, il permet des généralisations que l'élève serait souvent en peine de faire s'il ne disposait pas du symbolisme.

Les structures multiplicatives

On peut faire sur les structures multiplicatives une démonstration voisine de celle qui vient d'être faite sur les structures additives. Voisine en ce sens qu'on peut dégager effectivement un grand nombre de situations de multiplication et de division, et une certaine variété de schèmes et de représentations symboliques. Mais l'analogie s'arrête là, parce que les difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves et l'organisation des relations qui sont l'occasion d'opérer une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations fournissent un tableau fort différent de celui que nous venons d'esquisser pour l'addition et la soustraction.

Partons d'une situation élémentaire de multiplication, telle qu'on pourrait l'utiliser pour introduire cette opération au CE2 ou au CE1.

Une voiture miniature coûte 5 francs. Combien 4 voitures coûtent-elles ?

Voitures	Francs
1	5
4	❑

Cette situation appelle une analyse intéressante, qui n'autorise nullement le ministère de l'Éducation nationale à faire l'impasse sur la proportionnalité à l'école élémentaire, comme la tendance s'en est manifestée, il y a un an, dans certaines discussions à la Direction des écoles et au Comité national des programmes.

Première question : est-il équivalent de multiplier 4 par 5 ou 5 par 4 ? Et s'agit-il d'une loi de composition binaire commutative ?

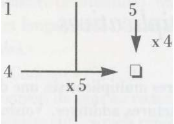
Si l'on considère les nombres 4 et 5 indépendamment des quantités qu'ils représentent, la réponse est OUI. Si, par contre, 4 représente 4 voitures et 5 représente 5 francs, alors les élèves peuvent se demander pourquoi, en multipliant 4 voitures par 5 francs, on obtient des francs et pas des voitures.

En fait, il ne s'agit pas d'une loi de composition binaire puisqu'il y a quatre quantités en jeu, comme le montre le petit tableau qui précède. De cette relation quaternaire, on peut extraire deux relations très différentes :

– soit la relation : 4 fois plus de voitures ⇒ 4 fois plus d'argent,

opération verticale sur le diagramme ci-dessous : on part de 5 et on multiplie par 4 ;

– soit la relation : le prix de 5 voitures est à 5 voitures ce que le prix d'une voiture est à 1 voiture, opération horizontale sur le diagramme : on part de 4 et on multiplie par 5.



L'opération verticale utilise une propriété d'isomorphisme de la fonction linéaire :

$$P(4) = 4P(1)$$

cas particulier de la propriété

$$P(n) = nP(1),$$

et plus généralement de la propriété

$$P(nx) = nP(x).$$

L'opération horizontale utilise la propriété du coefficient constant :

$$P(4) = a \times 4$$

cas particulier de la propriété $P(x) = ax$.

La preuve que ces deux opérations ne sont pas conceptuellement équivalentes, c'est que la première peut être réduite à une addition itérée :

5 francs + 5 francs + 5 francs + 5 francs

tandis que la seconde ne le peut pas :

4 voitures + 4 voitures + 4 voitures + 4 voitures + 4 voitures

ne correspond à rien d'intelligible dans cette situation, et en tout cas ne peut pas donner des francs.

Si l'on introduit la multiplication comme une addition itérée, on ne peut le faire que dans le sens vertical. La multiplication n'est pas ici commutative.

Ainsi les élèves rencontrent certaines propriétés de la proportionnalité dès leur première introduction à la multiplication. La disposition en tableau permet de voir aisément qu'il existe deux catégories de divisions – désignées par les Anglo-Saxons par les termes de partition et de quotition :

Partition | **Quotition**

$$
\begin{array}{c|c}
\text{gâteaux} & \text{francs} \\
1 & \square \\
 & \uparrow /4 \\
4 & 28
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
\text{gâteaux} & \text{francs} \\
1 & 7 \\
 & \\
\square & \xleftarrow[/7]{} 28
\end{array}
$$

$$P(1) = \frac{P(n)}{(n)} \qquad\qquad X = \frac{P(X}{a}$$

On peut également mesurer la complexité de l'opération d'inversion du coefficient constant, dans le cas de la quotition. Le raisonnement complet se traduit en effet par une équation aux dimensions qui comporte un quotient de dimensions au dénominateur

$$\frac{28 \text{ francs}}{7 \text{ francs}/1 \text{ voiture}} = \square \text{ voitures}$$

Aussi bien, les élèves ne procèdent-ils pas de cette manière pour traiter les situations de quotition, mais recherchent plutôt le rapport scalaire λ entre 7 francs et 28 francs pour le reporter de l'autre côté. Ce rapport λ, appliqué à 1 gâteau, donne le résultat recherché.

$$
\begin{array}{c|c}
\text{gâteau} & \text{francs} \\
1 & 7 \\
\times\lambda \downarrow & \downarrow \times\lambda \\
\square & 28
\end{array}
$$

Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre quelconque, dans la relation quater naire déjà vue pour la multiplication et la division, pour obtenir un problème de recherche de quatrième proportionnelle.

Quatrième proportionnelle

$$
\begin{array}{cc}
a & b \\
c & \square
\end{array}
$$

À la fin de l'école élémentaire et au début du collège, les élèves disposent déjà de plusieurs schèmes. Écarter la proportionnalité de l'école élémentaire n'a aucun sens. Il est d'ailleurs faux que les enfants seraient incapables d'en comprendre les propriétés.

Ils sont même relativement à l'aise avec les propriétés d'isomorphisme, alors qu'on ne les leur enseigne guère. Pour des domaines familiers (partage, calcul de prix et de quantités, recettes de cuisine) et pour des valeurs numériques qui se prêtent à l'extraction des relations pertinentes, les élèves mettent notamment en œuvre des décompositions linéaires qui ne leur ont jamais été enseignées. Ma surprise de chercheur a commencé le jour où j'ai vu des enfants utiliser de telles procédures et ne pas utiliser celles qu'on leur enseignait.

On comprend ainsi l'importance théorique des idées de concept-en-acte et de théorème-en-acte.

Les choses ne s'arrêtent pas là, et on peut montrer que les proportions peuvent s'enchaîner pour former de nouvelles proportions, ou se croiser pour former des proportions doubles, triples et plus complexes encore. Les élèves rencontrent les proportions doubles dès l'école élémentaire avec le concept d'aire, ou avec des problèmes de consommation comme le suivant :

> *Deux classes de CM2 partent à la montagne pendant 28 jours. En tout 50 enfants. Dans la semaine qui précède le voyage, les élèves cherchent à calculer les quantités de nourriture nécessaires, notamment la quantité de sucre. Dans une documentation, un élève trouve l'information suivante : « Il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants. »*
>
> *Une fillette déclare alors : « 5 fois plus, 4 fois plus, ça fait 20 fois plus. »*

Je ne ferai qu'un bref commentaire sur le raisonnement de cette fillette, en le mettant sous une forme mathématique explicite.

La consommation de sucre de 5 fois 10 enfants pendant 4 fois 7 jours est égale à 5 fois 4 fois (20 fois) la consommation de 10 enfants pendant 7 jours

$$S(5 \times 10, 4 \times 7) = 5 \times 4\ S(10, 7)$$

cas particulier du théorème fondamental des fonctions bilinéaires :

$$f(\lambda_1 x_1 , \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1 , x_2)$$

Bien entendu, c'est parce que les rapports 5 et 4 sont faciles à trouver que la fillette a pu faire ce raisonnement. Elle n'est pas en mesure de généraliser. Mais on voit sur cet exemple comment l'intuition des élèves peut être analysée. Cette analyse permet d'offrir aux élèves des situations de recherche plus riches, des occasions de découvertes intéressantes et des représentations symboliques véritablement opérationnelles.

Cela ne signifie nullement que les difficultés conceptuelles sont effacées. On sait par exemple que la multiplication par un nombre plus petit que 1 laisse désarmés la majorité des élèves de CM2, des élèves de 4^e, des adultes et même des élèves-maîtres. La raison de cette difficulté tient à la conception de la multiplication que se forment spontanément les élèves : la multiplication fait plus grand (et la division fait plus petit). Or la multiplication par un nombre plus petit que 1 aboutit à un résultat plus petit que le nombre de départ. Cette contradiction laisse sans ressources une proportion importante des élèves jusqu'au lycée.

Conclusion

Ces derniers exemples illustrent bien les problèmes d'apprentissage des mathématiques. Cet apprentissage se fait sur une très longue période de temps. Les compétences nouvelles s'appuient le plus souvent sur les compétences antérieurement acquises, sans entrer en contradiction avec elles, même lorsqu'elles comportent une part importante de nouveauté. C'est un processus de filiation. Mais, dans un certain nombre de cas, la rupture fait place à la filiation, parce que les connaissances anciennes font obstacle à l'émergence des connaissances nouvelles. On l'a vu pour les structures additives, on vient de le voir pour les structures multiplicatives. On ne peut pas comprendre ces phénomènes si on ne fait pas l'hypothèse que, au cours de leur expérience, et en liaison avec la structure des premières situations maîtrisées, les élèves développent spontanément des conceptions qui peuvent leur servir d'appui ou d'obstacle pour leurs apprentissages ultérieurs.

L'enjeu de la recherche est donc de dénicher ces conceptions cachées, ainsi que les connaissances en acte qui organisent les conduites des élèves en situation. L'un des problèmes de l'enseignant est de faire le lien entre les connaissances implicites des élèves et les connaissances explicites du mathématicien. Encore faut-il pour cela connaître, respecter, et être en mesure d'analyser les connaissances implicites des élèves. Cette analyse est nécessairement mathématique, à un certain niveau. Cela ne veut pas dire qu'elle ne bouscule pas les manières de voir du mathématicien. Cela ne veut pas dire non plus que l'analyse mathématique peut être resservie telle quelle aux élèves. Le formalisme de la fonction linéaire, que j'ai abondamment utilisé plus haut, est destiné à l'enseignant. Le proposer aux élèves du cours moyen serait à coup sûr les jeter dans le plus grand trouble. Mais il existe, avec les tableaux et les opérateurs, des moyens de représenter de manière adéquate les procédures utilisées ou utilisables par les élèves. Le symbolisme peut être la pire ou la meilleure des choses. Un symbolisme n'est pertinent que s'il vient au moment propice pour éclairer et objectiver un raisonnement déjà accessible mais mal assuré. Il lui donne alors fiabilité et généralité. Il peut aussi venir trop tôt, ou trop tard.

Bibliographie

BIDEAUD J., MELJAC C., FISCHER J.-P. (1991), *Les Chemins du nombre*, Lille, Presses Universitaires de Lille.

BROUSSEAU G., « Utilité et intérêt de la didactique », *Grand N*, n° 47, pp. 93-114.

ERMEL (1992), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au cours élémentaire première année*, Paris, Hatier.

FAYOL M. (1990), *L'Enfant et le Nombre*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

VERGNAUD G. (1981), *L'Enfant, la Mathématique et la Réalité*, Berne, Peter Lang.

VERGNAUD G. (1990), «La théorie des champs conceptuels», *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 10, 2-3, pp. 133-170.