De l'arithmétique à l'algèbre ; quelques difficultés au début de l'école secondaire

Actes du 1er Colloque en Didactique des Mathématiques
Réthymnon, Grèce

1998 (avril)

De l'arithmétique à l'algèbre
Ruptures et continuités

Gérard Vergnaud CNRS Paris

Cet article est écrit en hommage à Davydov. Sa contribution à la didactique des mathématiques est exceptionnelle. J'ai voulu témoigner, par ma propre contribution, des convergences qui existent entre mon point de vue et le sien, ainsi qu'exprimer quelques réflexions susceptibles d'aider la communauté des chercheurs en didactique et en psychologie des mathématiques à poursuivre et développer le travail entrepris par Davydov.

1Quantités, grandeurs, transformations, relations et nombres

Sans la mesure des quantités discrètes, le nombre entier n'aurait jamais été inventé ; sans la mesure des grandeurs continues, les nombres rationnels et les nombres réels non plus ; sans les transformations et relations , les nombres relatifs n'auraient pas non plus la signification qu'ils ont aujourd'hui.
Les concepts mathématiques, comme les autres concepts, se sont développés au cours de l'histoire en réponse à des questions que se sont posées les hommes. L'épistémologie est précisément l'étude des relations fonctionnelles qu'entretiennent les concepts ave les problèmes pratiques et théoriques auxquels ils apportent une réponse. Davydov a bien montré cette relation fondamentale des nombres avec les problèmes de comparaison et de composition des quantités et des grandeurs. Il l'a fait en s'appuyant sur les réflexions de Kolmogorov et de Lebesgue, et en apportant à cette question une contribution personnelle décisive, l'expérimentation en classe et la démonstration de la faisabilité d'une entreprise didactique reposant sur les grandeurs. L'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques complète ainsi à point nommé l'épistémologie des mathématiques .
Une autre idée-force de Davydov est que, dans l'étude du développement de la pensée, il faut accorder une grande importance au contenu conceptuel des connaissances, notamment de celles qui sont enseignées à l'école. En d'autres termes les progrès de l'intelligence ne se mesurent pas en termes purement logiques, mais à l'aune de l'apprentissage de connaissances précises, en mathématiques comme en biologie ou en histoire. La sagesse est donc d'étudier patiemment les progrès et les conditions de la conceptualisation des élèves, dans les différentes disciplines enseignées à l'école. Les raisonnements étudiés par Davydov concernant la comparaison et la composition des grandeurs relèvent des mathématiques, non pas de la logique. C'est ce qui explique, selon moi, la volonté jamais démentie de Davydov de formaliser en termes algébriques les raisonnements des élèves sur les grandeurs : relation d'ordre, relation d'équivalence, somme, différence, rapport.

2Richesse conceptuelle de l'arithmétique dite « élémentaire »

La relation partie-partie-tout est une relation fondamentale : elle offre en particulier une base intuitive pour l'addition des cardinaux :

Card(P1) + Card(P2) = Card(Tout)   pourvu que P1 et P2 soient disjoints

Or les enfants de cinq ans développent en même temps une seconde conception de l'addition : l'augmentation d'une quantité initiale.
Cela signifie en toute rigueur que l'addition est alors conçue à la fois comme une loi de composition binaire et comme la transformation d'un état, c'est à dire comme un opérateur. On peut parler sans exagération des « deux prototypes de l'addition », en entendant par « prototype » une conception développée par l'enfant pour donner du sens à un concept nouveau. A la différence de l'addition, il n'existe qu'un seul prototype pour la soustraction : la diminution d'une quantité initiale donnée. C'est la première situation qui soit comprise comme une soustraction par l'enfant de moins de six ans. La soustraction comme complément (*trouver le nombre de garçons connaissant le nombre de filles et le nombre total d'enfants*) n'est comprise que plus tard et n'est donc pas une situation prototypique . Le modèle de la transformation d'un état initial l'emporte alors sur celui de la composition binaire.
A partir de cette première disparité, on peut définir une grande variété de problèmes d'addition et de soustraction (Vergnaud 1982,1999) y compris les problèmes issus de la quantification des relations de comparaison. Certains problèmes, qui mettent en jeu la composition et la décomposition des transformations et des relations, sont d'une difficulté durable : les plus difficiles donnent lieu à des échecs majoritaires jusqu'à la fin de l'école secondaire courte en France . La conquête conceptuelle des structures additives s'étend ainsi sur une très longue période du développement et de l'apprentissage.
Il en va de même pour les structures multiplicatives : si les premières situations de multiplication et de division sont comprises dès le deuxième et le troisième grades, certaines situations de proportionnalité simple et de proportionnalité multiple donnent lieu à des échecs massifs jusqu'à la fin de l'école secondaire et chez les adultes.
La première conséquence théorique de cette constatation est que l'épistémologie des mathématiques ne concerne pas que les fondements et les premiers apprentissages, mais également tout l'édifice. On sait par exemple aujourd'hui que l'inversion d'une transformation négative est délicate pour beaucoup d'enfants de huit ans (*Pierre vient de dépenser 9 roubles pour acheter une voiture miniature ; il a maintenant 7 roubles dans son porte-monnaie ; combien de roubles avait-il avant d'acheter sa voiture ?*). On sait aussi que la décomposition d'une transformation en deux transformations de signes contraires dont l'une est inconnue donne lieu à 80% d'échecs chez les élèves de onze et douze ans.(*Jeanne a joué aux billes le matin et l'après-midi ; elle a gagné 18 billes en tout ; elle en avait perdu 7 l'après-midi ; que s'était-il passé le matin ?*).
Il faut donc s'intéresser à la diversité des classes de problèmes et des conceptualisations qui sont nécessaires pour les traiter. J'ai introduit le concept de champ conceptuel pour désigner l'ensemble des situations et des phénomènes qui donnent du sens à certains concepts et qui enrichissent ce sens au cours du développement cognitif. Il désigne corrélativement l'ensemble des concepts pertinents pour penser et traiter ces situations. C'est ainsi que qu'on peut distinguer six relations de base pour le champ conceptuel des structures additives, relations qui, par composition, permettent d'engendrer tous les problèmes d'addition et de soustraction. L'ensemble des concepts pertinents pour penser et traiter ces relations est très

large : cardinal, mesure, partie, tout, état initial, état final, transformation, relation de comparaison, référé, référent, abscisse, composition, inversion, addition, soustraction, nombre naturel, nombre relatif etc.

3Algèbre et structures additives, une dialectique complexe

Lorsque les élèves commencent à étudier plus intensément l'algèbre, ils s'appuient nécessairement sur l'arithmétique, et une partie des opérations algébriques trouve effectivement sa justification dans les relations arithmétiques. Prenons l'exemple de la solution (sous sa forme détaillée ou abrégée) de l'équation

$$3x + 46 = 64$$

solution détaillée

$$3x + 46 - 46 = 64 - 46$$
$$3x = 64 - 46$$
$$3x = 18$$
$$3x/ 3 = 18/3$$
$$x = 18/3x = 6$$

solution abrégée

$$3x = 64 - 46$$
$$x = 18/3$$
$$x = 6$$

Les élèves de douze ou treize ans ne sont pas en général déconcertés par ce traitement algébrique : 64 peut être considéré comme le tout, 3x comme une partie et 46 comme l'autre partie. Aucune donnée ne vient gêner cette interprétation, parce que le tout est plus grand que la partie, que 3x est donc positif, et qu'en outre 18 est un multiple de 3.

Mais il suffit de proposer aux mêmes élèves l'équation

$$3x + 64 = 46$$

pour que nombre d'entre eux soient déconcertés : 46 étant plus petit que 64, il leur est impossible d'interpréter le premier membre comme la somme de deux parties.

On peut même leur proposer l'équation

$$64 - 3x = 46$$

dont la solution est la même que celle de la première équation. Ils sont déconcertés à nouveau : il faudrait en effet ajouter 3x à chacun des membres de l'équation, mais comment peut-on ajouter un terme qu'on ne connaît pas !

On peut pousser plus loin l'analyse des relations entre arithmétique et algèbre en regardant les significations du signe « moins » et du signe « plus »dans des petits problèmes qui peuvent tous être résolus par l'application du théorème d'algèbre probablement le plus fondamental :

$$a + x = b \qquad x = b - a \qquad \text{quels que soient a et b}$$

Prenons des exemples :

Il y a 12 enfants pur l'anniversaire de Paul ; 7 sont des garçons ; combien y a-t-il de filles ?
$7 + x = 12$ $x = 12 - 7$
le signe « moins » exprime une opération arithmétique de complément

Robert vient de gagner 15 billes en jouant avec Rosa ; il a maintenant 36 billes ; combien en avait-il avant de jouer ?
$x + 15 = 36$ $x = 36 - 15$
Le signe « moins » exprime une opération arithmétique d'inversion

Fatima a 13 ans ; son frère Karim en a 8 ; combien Fatima a-t-elle d'années de plus que son frère ?
$8 + x = 13$ $x = 13 - 8$
le signe « moins » exprime une différence, ou encore la quantification d'une comparaison

Léna vient de dépenser 13 roubles pour acheter un cadeau pour son amie ; elle avait 20 roubles ; combien lui reste-t-il ?
Il s'agit cette fois d'une situation prototypique de soustraction $x = 20 - 13$
Le signe « moins » exprime une diminution

Certes les élèves n'ont nullement besoin de l'algèbre pour résoudre ces problèmes et l'on peut penser que les commentaires qui précèdent n'ont pas de portée pratique. C'est ne pas voir que les relations de complément, d'inversion, de différence et de diminution peuvent intervenir dans des problèmes plus complexes, et donner lieu alors à des interprétations susceptibles de gêner la mise en équation et le traitement algébrique.

Sara a 4 billes de plus que Robert ; en jouant avec Sara, Robert perd la moitié des billes qu'il avait au début ; il joue à nouveau avec Sara et gagne 7 billes ; il a maintenant 2 billes de plus que Sara ; combien Sara avait-elle de billes au début ?