Représentation et activité : deux concepts étroitement associés

In Congreso Internacional Logico-Matematica
-en Educatio'n Infantil-, Madrid

2006 (mars)
Madrid, Espagne

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2006_Representation-Activite_Congres-Madrid


ORGANIZA
PATROCINA
edebé
EXPERTOS
PATROCINADORES
ORGANIZA
COMITÉ CIENTÍFICO
MADRID, ESPAÑA
28, 29 y 30 de Abril de 2006
1º Congreso Internacional
Lógico-Matemática
-en Educación Infantil -

Curriculum

Castellano

Abstract

26 mars

Représentation et activité : deux concepts étroitement associés

Gérard Vergnaud

Résumé en anglais

Representation and activity : two concepts intrically tied together

Behaviorists wanted to get rid of the concept of representation. Not only did they fail, but representation is to-day the most central concept of psychology. Concerning the development of mathematical knowledge in children, representation is not made only of numbers, figures, drawings, diagrams, tables, graphs or algebras, but also of interiorised forms of activity in situations.

Activity is more than behavior : behavior is only the visible part of activity. Therefore when analysing mathematical behavior, one must look into the representational activity underlying it. The concept of scheme is essential to cover this problem .

The most important part of our knowledge consists of competences, and they cannot be put into words easily. This is true for every domain of knowledge, including mathematics ; and it is even more true for children, as they are unable to express the knowledge they use in action.

Facing situations, children can progressively grasp relational entities between quantities and magnitudes, between positions, figures and movements… Part-part-whole relationships, state-transformation-state relationships, isomorphic properties in problems of proportion cannot be reduced to numerical structures ; nor can they be considered as linguistic or symbolic entities only. They are concepts and theorems-in-action.

The implicit character of a large part of our knowledge does not mean that explicit knowlege is not operational. But we cannot be satisfied with a theory that would consider mathematics only as an explicit body of knowledge.

Even when one is interested in the function of language and symbols in the development of the mind, it is necessary to identify safely which properties of the signifier represent which properties of the signified. We are aware to-day that words mean different things for different individuals, especially for the teacher and each student individually. Vygotski explained 70 years ago that the « sense » given to words is different from their conventional « meaning » . Therefore there is a theoretical need to analyse activity and representation as composed also of invariants that may be different from the meaning of words. This problem can be solved only if we accept the idea that schemes involve operational invariants : concepts and theorems-in-action. It is our job to identify them, together with the other components of schemes, and representation.

Several examples will illustrate this unexpected view.

QUELLES DEFINITIONS DE LA REPRESENTATION ?

Peu de concepts sont utilisés avec autant de significations différentes, même dans le seul domaine de la psychologie. En outre c'est de la représentation que traitent de nombreux auteurs lorsqu'ils parlent de mémoire, de jugement, de langage ou de raisonnement. Je n'ai pas le loisir, dans cette conférence, de passer en revue ces différentes significations. Il y faudrait un ouvrage. Je me contenterai de définir trois d'entre elles, assez fréquemment adoptées, et que je trouve utiles à l'analyse ; puis j'en introduirai une quatrième, qui modifie sensiblement la compréhension des trois premières.

Sens 1 : le flux de la conscience

Sens 2 : les signes et symboles, langagiers ou non, avec lesquels nous communiquons.

Sens 3 : les systèmes de concepts, explicites ou non, avec lesquels un sujet pense le réel, c'est-à-dire identifie les objets du monde, leurs propriétés, leurs relations et transformations .

Sens 1 : le flux de la conscience

L'expérience de ce flux est la preuve la plus directe de l'existence de la représentation comme phénomène psychologique. Tout individu a en effet l'expérience du mouvement quasi-permanent d'images visuelles, auditives, kinesthésiques, somesthésiques ... qui accompagnent la vie éveillée et le rêve ; il a aussi conscience de ses propres gestes et paroles, même s'ils sont seulement ébauchés en pensée. Nous ne sommes pas pour autant en mesure de bien les analyser, mais ce mouvement quasi continu de percepts, d'idées, d'images, de mots et de gestes, plus ou moins intériorisés, témoigne du fait que la représentation fonctionne de manière irrépressible et spontanée en toute occasion. Le flux de la perception fait partie intégrante du flux de la conscience, de même que le flux de l'imagination, associé ou non à la perception.

Sens 2 : Les signes et symboles

Sans signes et symboles la représentation et l'expérience ne peuvent pas être communiquées. En outre le travail de la pensée est souvent accompagné, voire piloté, par des formes langagières et des manipulations de symboles. La numération et les notations algébriques ne sont pas à elles seules des concepts mathématiques, mais elles jouent un grand rôle dans la conceptualisation et le raisonnement mathématiques ; la notation musicale n'est pas non plus la musique, mais l'exécution de certaines œuvres est impensable sans elle ; le langage n'est pas la pensée, mais que serait la pensée sans le langage ?

Sens 3 : le système de concepts

Il s'agit du système avec lequel nous prélevons l'information, en vue de conduire notre action et notre activité de la manière la plus pertinente possible. Cette signification est moins évidente que les premières, parce qu'elle repose sur la thèse que la représentation, y compris la perception, est structurée par des concepts. Le mot "concept" est pris ici dans un sens large, puisqu'il désigne des constituants de nature diverse, qui peuvent rester totalement implicites, alors que le mot ‟ concept ” est normalement réservé à des objets de pensée explicites, aussi bien définis que possible. Cette question théorique est d'une grande importance. Elle sera clarifiée plus loin, lorsque nous parlerons des invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. La distinction entre conceptualisation et symbolisation est essentielle : on ne doit donc pas confondre les sens 2 et 3, quel que soit le rôle des signes et des symboles dans la conceptualisation.

A côté des trois significations que je viens de mentionner, il me faut introduire un quatrième sens, celui de la représentation comme activité fonctionnelle : la représentation n'est pas en effet un épiphénomène, qui accompagnerait l'activité sans vraiment l'orienter et la nourrir. Ce n'est pas non plus un dictionnaire, ni une bibliothèque ; c'est un processus dynamique, ou mieux encore un ensemble hiérarchisé de processus dynamiques.

Sens 4 : la représentation comme ensemble de schèmes

La fonctionnalité de la représentation vient de deux raisons principales et complémentaires :

- elle organise l'action, la conduite, et plus généralement l'activité, tout en étant elle-même le produit de l'action et de l'activité. C'est le concept de schème qui exprime le mieux cette idée.

- elle permet une certaine simulation du réel, et donc l'anticipation ;

Ce quatrième sens modifie la portée théorique des trois premières significations évoquées ci-dessus. En effet, le flux de la conscience est lui-même partiellement organisé par des schèmes, avec leur double propriété d'être opportunistes et systématiques ; c'est aussi dans les schèmes qu'il nous faut rechercher la première expression des concepts organisateurs de l'activité ; enfin les activités langagières et symboliques sont elles-mêmes engendrées par des schèmes de dialogue et d'énonciation.

La conscience accompagne partiellement l'activité, mais la structure de l'activité n'est pas identique, tant s'en faut, à celle du flux de la conscience. La raison de cet écart est que la conscience ne porte que sur une petite partie du fonctionnement psychique en situation (en priorité la prise d'information et le contrôle des effets de l'action). Il n'en reste pas moins que les concepts mobilisables dans une situation donnée sont largement déterminés par les caractéristiques de l'activité, notamment par les buts que le sujet se donne, et les contraintes particulières avec lesquelles il est conduit à agir. Ces contraintes peuvent être réelles ou imaginées : en effet une deuxième propriété de la conscience, complémentaire de la première, est de pouvoir évoquer des objets absents ou imaginaires, en relation avec l'intention, le désir, la perception.

EXEMPLES DE SCHEMES

Le schème du dénombrement

Un, deux , trois, quatre... quatre! Dans le schème du dénombrement d'un enfant de 4 ou 5 ans, on peut identifier au moins deux concepts mathématiques implicites : celui de correspondance biunivoque et celui de cardinal.

La correspondance biunivoque (il faut compter tous les objets, et ne pas compter deux fois le même) prend, dans l'activité de l'enfant, la forme d'une relation entre quatre catégories d'éléments : 1) les objets à dénombrer, 2) les gestes du bras, de la main et du doigt, 3) les gestes du regard, 4) les gestes de la parole. Si l'une de ces correspondances n'est pas biunivoque, si le regard ou la parole vont trop vite ou trop lentement par exemple, le dénombrement est raté. C'est ce qui arrive aux jeunes enfants, et à certains enfants handicapés qui ont du mal à distribuer dans le temps la succession de leurs gestes, et à coordonner les différents registres concernés, notamment celui du regard. Les règles qui engendrent l'activité au fur et à mesure concernent donc la prise d'information et le contrôle, pas seulement l'action.

Le cardinal : dans l'exemple ci-dessus, un signe observable de cette conceptualisation est la répétition du dernier mot-nombre : *quatre…quatre* !. Certains enfants utilisent une autre modalité de l'énonciation, l'accentuation : *un, deux, trois, QUATRE!* On connaît les difficultés qu'ont certains enfants à cardinaliser : ils ne résument pas l'information recueillie sur la collection. En réponse à la question *combien?* posée par leur interlocuteur, ils recommencent à compter tous les objets.

Evidemment ils ne savent pas utiliser le cardinal pour opérer des additions.

Le schème de base de l'addition

Supposons qu'à un goûter d'anniversaire, une maman demande à sa fillette de 5 ans de compter les enfants qui se trouvent dans le salon. La fillette court dans le salon et en compte quatre. Elle rapporte l'information à sa maman, qui lui demande alors de compter les enfants qui se trouvent dans le jardin. La fillette court dans le jardin et en compte trois.

Combien cela fait-il en tout? demande la maman. La fillette se précipite à nouveau dans le salon (*un, deux,trois,quatre*) puis dans le jardin (*cinq, six, sept*) et vient annoncer *sept* à sa maman. Elle cardinalise, mais n'opère pas sur les nombres. Elle a certes pensé l'union des deux sous-ensembles puisqu'elle recompte le tout, mais elle n'a pas opéré sur les nombres. Après quelques mois elle sera probablement en mesure soit de déclarer que 4 + 3 ça fait 7, soit de ne pas recompter les enfants du salon, de retenir seulement le cardinal, et de compter à partir de là les enfants du jardin (*cinq, six, sept … sept !).* On peut dire qu'elle opère alors sur les nombres et pas seulement sur les ensembles.

Le théorème-en-acte qui lui permet de faire l'économie du recomptage du tout est un axiome de la théorie de la mesure

cardinal (salon U jardin) = cardinal (salon) + cardinal (jardin)

La nouvelle démarche de la fillette repose en effet sur la connaissance implicite qu'il est équivalent de faire l'union des parties d'abord et de dénombrer ensuite le tout, ou de dénombrer les parties d'abord et de faire la somme des cardinaux ensuite. C'est là une propriété constitutive du nombre, qui en fait un concept plus riche que ceux de relation d'ordre ou d'équivalence.

La recherche d'un état initial

Parmi les relations prototypiques de l'addition et de la soustraction, figure la relation entre un état initial, un état final, et la transformation entre état initial et état final (augmentation ou diminution, gain ou perte dans les exemples ci-dessous).

a) Pierre avait 6 billes, il joue une partie avec Robert et en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

b) Suzanne avait 9 billes, elle joue une partie avec Stéphanie et en perd 3. Combien en a-t-elle maintenant ?

c) Andrée avait 7 billes ; après avoir joué une partie avec Thierry elle en a 11. Que s'est-il passé au cours de la partie ? A-t-elle gagné ou perdu ? et combien de billes?

d) Thierry avait l6 billes ; après avoir joué une partie avec Andrée il en a 12. Que s'est-il passé au cours de la partie ? A-t-il gagné ou perdu ? et combien de billes ?

e) Stéphanie vient de gagner 3 billes en jouant avec Suzanne. Elle en a maintenant 10. Combien en avait-elle avant de jouer ?

f) Robert vient de perdre 5 billes en jouant avec Pierre. Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

De nombreuses recherches ont été conduites sur ce type de situations. On sait que les deux derniers cas (Stéphanie et Robert) sont les plus difficiles. Je vais m'intéresser au dernier. La solution canonique est une addition 7 + 5. Elle repose sur un nouveau théorème-en-acte : si une diminution fait passer de l'état initial à l'état final, alors une augmentation fait passer de l'état final à l'état initial. On inverse le sens de la transformation.

$$\text{Si } F = T(I) \text{ alors } I = T^{-1}(F)$$

D'où la règle : il faut rajouter les billes perdues. Or il existe un petit obstacle épistémologique à cette règle et à cette connaissance car l'addition, pour l'enfant est d'abord associée à un gain et non à une perte. Aussi observe-t-on que certains élèves recourent à un schème différent : faire une hypothèse sur l'état initial (mettons 15), appliquer la diminution −5, trouver 10, et se rapprocher de 7 en faisant une nouvelle hypothèse, par exemple 14. On observe même des ajustements plus sophistiqués, comme une diminution de 3 de l'hypothèse initiale (ajustement qui s'appuie sur la différence de 3 entre le résultat qu'on vient d'obtenir (10) et l'état final indiqué dans l'énoncé de la situation (7).

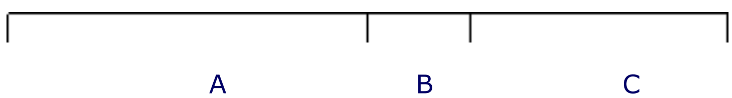
Certains enfants refusent le problème purement et simplement : ils ne peuvent pas puiser dans leurs ressources les schèmes qui leur permettraient de donner du sens à cette situation.

Or l'ensemble des situations d'addition et de soustraction est formé d'un grand nombre de classes de problèmes, qui relèvent non seulement de la transformation de quantités et de grandeurs ou de la relation partie/partie/tout, mais aussi de relations de comparaison positives et négatives (n de plus ou de moins que), de combinaisons et décombinaisons de transformations (gains et pertes, recettes et dépenses), de transformations des relations positives et négatives (emprunts et remboursements). Il est alors nécessaire de recourir au cadre théorique des champs conceptuels, lequel est d'ailleurs pertinent aussi bien pour l'étude des compétences des adolescents et des adultes que pour celles des jeunes enfants. Un champ conceptuel est par définition un ensemble de situations et de concepts en étroite connexion. J'y reviens plus loin.

Le placement de données numériques ou quasi-numériques sur la droite

Dans une recherche ancienne, nous avions demandé à des élèves de la fin de l'école élémentaire et du début de l'école secondaire de placer sur une droite non encore graduée des poids de bébés à la naissance (premier cas), des performances de champions au lancer de javelot (deuxième cas), des dates de naissance (troisième cas), des âges de jeunes enfants (quatrième cas). Nous leur demandions de graduer la droite en prenant comme échelle un centimètre pour 100 grammes (premier cas), un centimètres pour 10 centimètres (deuxième cas), un centimètre pour un mois (troisième et quatrième cas), puis de placer les données. Ces données sont numériques dans les deux premiers cas et quasi-numériques dans les deux derniers. La bande de papier sur laquelle il leur fallait faire ce travail était de 60 centimètres et l'échelle était telle qu'il leur était possible de placer toutes les données et le zéro de l'origine sur la bande dans le cas des poids de bébés à la naissance, et dans celui des âges des jeunes enfants, mais pas dans les deux autres cas. Les enfants inventent des solutions surprenantes, et nous avons recueilli plus de 50 groupes différents de protocoles. Voici quelques exemples :

-*Le placement bout à bout des données* : la seconde donnée est placée à partir du point d'arrivée de la première, et ainsi de suite. Il n'y a pas d'inclusion des signifiants graphiques.



-*La décomposition de la même donnée en parties disjointes* : un lancer de javelot de 69, 75 mètres est décomposé en 6 dizaines de mètres, 9 mètres, et 75 centimètres , et représenté par trois tracés différents, placés dans des régions différentes de la bande de papier, avec des échelles différentes. Comme cette manière d'interpréter la tâche vaut pour les sept lancers de javelot, la bande se trouve couverte par trois familles de segments : une pour les dizaines, une pour les mètres, une pour les centimètres.

-*le jour du mois seulement sur une ligne de 30 unités*, dans le cas des dates de naissance. Le données concernant l'année et le mois de naissance sont délibérément ignorées.

-*le mois de naissance seulement sur une ligne de 12 unités*, et l'abandon de l'année de naissance, comme s'il s'agissait d'anniversaires .

-*les grammes seulement dans le cas des poids de bébés, placés bout à bout,* et l'abandon des kilogrammes.

Les schèmes ayant engendré ces protocoles ont deux caractéristiques essentielles: ils sont opportunistes puisque les enfants font feu de tout bois . Ils sont systématiques puisque, après avoir adopté une certaine interprétation de la demande du maître, ils se tiennent à cette interprétation pour toutes les données de même nature, et utilisent les mêmes règles de placement ou de dessin. Ce exemple permet de saisir concrètement le rôle et le fonctionnement des schèmes dans l'adaptation aux situations nouvelles.

Si la connaissance est adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent, et ils s'adaptent à des situations . Le couple schème/situation est la clef de voûte de la théorie constructiviste.

Les schèmes de la proportionnalité

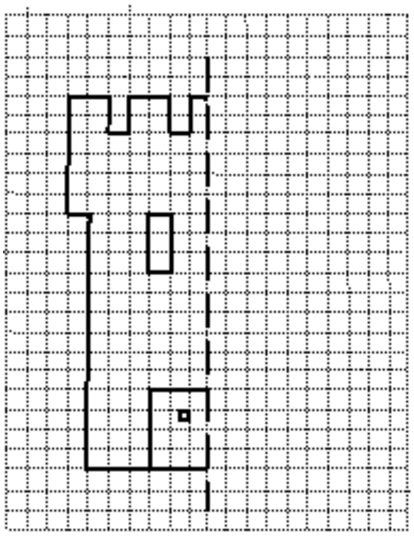
Supposons qu'un enfant, en voyage avec son père, s'adresse spontanément au problème de calculer le temps qu'il faudrait pour parcourir 860 km sur l'autoroute sachant que la voiture a parcouru 245 km en 2 heures et 5 minutes **(**sous l'hypothèse bien entendu que la vitesse moyenne restera la même). Cette situation relève de plusieurs schèmes de raisonnements possibles. On peut utiliser le produit en croix, enseigné partout dans le monde et très peu utilisé dans les situations ordinaires. On peut calculer la distance parcourue en une heure et diviser 860 par cette distance. On peut diviser 860 par 245 pour trouver le nombre de fois qu'il faudra rouler 2 heures et 5 minutes (rapport entre deux grandeurs de même nature, des distances en l'occurence), observer que 2 heures et 5 minutes c'est 125 minutes , et que 125 c'est la moitié de 250, proche de 245 minutes. Cela permet d'évaluer la vitesse à 2km par minute environ. Mais on peut aussi considérer que 245+245+245 ça fait 735 et que les 125 km restants pour atteindre les 860 km, c'est à peu près la moitié de 245.

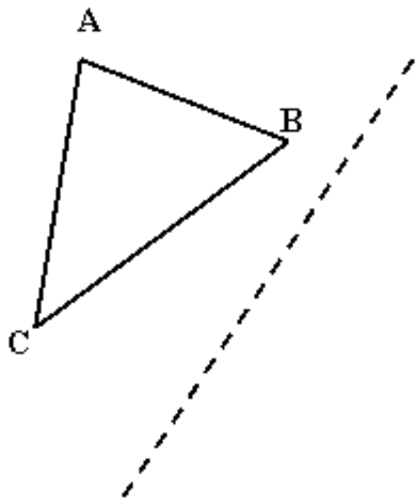
Ces différentes manières de raisonner résultent de la mise en œuvre de schèmes distincts concernant la proportionnalité et l'approximation, qui mettent différemment en jeu les propriétés de la linéarité (isomorphisme de l'addition et de la multiplication par un scalaire), et celles des coefficients de proportionnalité, qui expriment des quotients de dimensions (kilomètres à l'heure, kilomètres par minute, coefficients inverses de la vitesse). Ces schèmes sont inégalement disponibles chez les élèves. Ils peuvent coexister ; leur utilisation dépend alors de leur plus ou moins grande pertinence par rapport aux variables de situation. L'orientation vers telle ou telle manière de procéder est elle-même pilotée par un schème, qui évalue la faisabilité et le coût de chaque procédure disponible, dans la situation particulière rencontrée, en fonction des valeurs numériques notamment.

Un commentaire théorique intéressant ici concerne la différence entre concept-en-acte et théorème-en-acte. La recherche du rapport entre 860 et 245 est orientée par l'idée qu'on peut raisonner avec le théorème d'isomorphisme $f(ax) = af(x)$. Ce rapport ($a = 860/245$) est un nombre scalaire, c'est-à-dire un nombre sans dimension, qui exprime un rapport entre deux distances. C'est typiquement un concept-en-acte, pertinent pour le raisonnement, mais ce n'est pas un théorème-en-acte. Les théorèmes ont une valeur de vérité (ils peuvent être vrais ou faux), pas les concepts : ils n'ont qu'une valeur de pertinence.

L'exemple de la symétrie : forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

Nous n'avons parcouru qu'une partie du chemin. La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire de la connaissance (qui permet d'agir en situation) et la forme prédicative (qui consiste à énoncer des relations des objets entre eux) .La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation est essentielle dans les processus de conceptualisation.Parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des situations et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et des symbolismes mathématiques. Au point que certains chercheurs mettent les difficultés des mathématiques sur le compte du langage. Pourtant les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance. C'est un point sur lequel les idées ne sont claires ni chez tous les enseignants, ni chez les psychologues, ni même chez certains mathématiciens. Pour montrer que le langage et les processus d'énonciation et de compréhension des énoncés ne jouent pas un rôle négligeable, je vais prendre deux exemples de construction du symétrique d'une figure, qui sont contrastés à la fois du point de vue des schèmes nécessaires à la construction, et des énoncés qu'on peut devoir comprendre ou produire à cette occasion.





d

La première figure correspond à une situation qui est susceptible d'être proposée à des élèves de 8 à 10 ans, et dans laquelle il faut compléter le dessin de la forteresse par symétrie autour de l'axe vertical. La seconde correspond à une situation classiquement proposée en France à des élèves de 12 ans : construire le triangle symétrique du triangle ABC par rapport à d.

Dans le premier cas les difficultés gestuelles ne sont pas totalement négligeables parce qu'il faut tracer un trait juste en dessus du pointillé, ni plus haut, ni plus bas, et l'on sait que ce n'est pas si facile avec une règle ; même chose pour le point de départ et le point d'arrivée du trait. Il existe aussi des règles conditionnelles : par exemple "un carreau à gauche sur la figure déjà dessinée, un carreau à droite sur la partie à compléter", ou encore "deux carreaux vers le bas sur la partie gauche, deux carreaux vers le bas sur la partie droite", ou bien encore "un carreau à droite sur la figure de gauche, un carreau à gauche sur la figure de droite " à partir d'un point de départ homologue du point de départ à gauche"

Ces règles ne sont pas très complexes ; elles n'en représentent pas moins plusieurs concepts-en-acte et théorèmes-en-acte concernant la symétrie et la conservation des longueurs et des angles. Comme tous les angles sont droits, et que les longueurs sont exprimées par des unités discrètes (les carreaux), la difficulté reste modeste..

Dans la seconde figure, le tracé du triangle A' B' C' symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d avec les instruments habituels du dessin (la règle, le compas, l'équerre...) est beaucoup plus complexe. Déjà la réduction de la figure triangulaire à ses trois sommets, éléments nécessaires et suffisants pour le tracé du triangle symétrique, est une abstraction non négligeable pour certains élèves, qui « voient » toute la figure comme une unité non décomposable. Si l'on raisonne ensuite à partir des propriétés de la médiatrice d des segment AA', BB' et CC' à construire, la conceptualisation est tout sauf triviale : pourquoi diable dessiner un cercle de centre A et s'intéresser aux points d'intersection avec la droite d ? On peut évidement utiliser l'équerre pour tracer la perpendiculaire à d passant par A, et reporter la distance entre A et la droite d, de l'autre côté de d pour déterminer A', mais il ne va pas de soi de penser cette distance comme invariante, en l'absence de tout tracé au départ. Il y a donc une rupture conceptuelle importante entre la première situation et la seconde, un saut épistémologique .

Je veux montrer maintenant que les énoncés possibles concernant la symétrie sont également sujets à des sauts importants. Voici quatre énoncés qui permettent de le montrer.

1 *la forteresse est symétrique*

2 *le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d*

3 *la symétrie conserve les longueurs et les angles*

4 *la symétrie est une isométrie*

Entre l'énoncé 1 et l'énoncé 2, il existe déjà un certain saut qualitatif : l'adjectif "*symétrique*", noté « S » passe du statut de prédicat à une place, à celui de prédicat à trois places ::

$$S(f) \longrightarrow S(A'B'C', ABC, d)$$

Entre l'énoncé 2 et l'énoncé 3, le prédicat " *symétrique* " est transformé en objet de pensée « *la symétrie* », doté à son tour de propriétés : celle de conserver les longueurs et celle de conserver les angles. L'opération linguistique de nominalisation est l'un du moyens habituels de cette transformation des prédicats en objets. Dans les énoncés 1 et 2, l'idée de symétrie " S " est prédicat (ou encore fonction propositionnelle); dans l'énoncé 3 elle est devenue objet (ou argument). Nous la notons " s " conformément au symbolisme habituel des logiciens ? La conservation des longueurs et des angles est alors une propriété de ce nouvel objet qu'est la symétrie.

$$\boxed{\begin{array}{l} S(f) \\ \qquad\qquad \longrightarrow \ Cl(s) \text{ et } Ca(s) \\ S(A'B'C', ABC, d) \end{array}}$$

Quand on passe à l'énoncé 4, une nouvelle transformation est effectuée : la conservation des longueurs et des angles est devenue à son tour un objet, « l'*isométrie* », noté « I »..

Et une relation d'inclusion est affirmée entre l'ensemble des symétries et l'ensemble des isométries

S C I

La signification du « *la* » de "*la symétrie*" dans les énoncés 3 et 4 est celle d'un quantificateur universel. La signification du « *la* » de "l*a forteresse*" ou de "*la droite d*" dans les énoncés 1 et 2 est celle d'un déictique et d'un singulier : « cette forteresse-là », « cette droite-là ». La relation entre signifiés et signifiants n'est donc pas biunivoque, en tous cas au niveau des mots.

Les textes mathématiques, les textes scientifiques et techniques, et plus généralement les textes élaborés (philosophie et littérature) fourmillent de ces variations de signification.

Inévitablement, l'accumulation de ruptures dans les formes opératoires et dans les formes prédicatives des connaissances mathématiques engendre des difficultés pour les élèves. Les enseignants sont encore faiblement avertis de ces ruptures.

DEFINITIONS DU CONCEPT DE SCHEME

Les définitions qui suivent sont complémentaires les unes des autres

Définition 1 : **le schème est une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situations déterminée.**

Commentaires :

- le schème n'est pas un stéréotype : au contraire, il permet l'adaptation de l'activité et de la conduite aux valeurs différentes prises par les variables de situation. Ce qui est invariant c'est l'organisation, non pas l'activité, ni la conduite.

- le schème s'adresse à une classe de situations ; cette classe peut être très petite, ou très grande. Au cours du développement cognitif, un schème a d'abord une portée locale, que le sujet devra ensuite d'élargir. Du fait qu'il s'adresse à une classe de situations, même petite, c'est un universel en ce sens qu'on peut le formaliser avec des règles et des concepts comportant des quantificateurs universels.

Un schème n'est pas en général un algorithme. Certaines formes d'organisation de l'activité mathématique sont effectivement des algorithmes : ils aboutissent, en un nombre fini de pas (effectivité), au traitement de toute situation appartenant à la classe visée. Les algorithmes sont des schèmes, mais tous les schèmes ne sont pas des algorithmes ; on peut même ajouter que certains algorithmes perdent au cours de l'apprentissage ou de l'expérience certaines de leurs caractéristiques, notamment leur propriété d'effectivité : des erreurs et des raccourcis peuvent les priver de la propriété d'aboutir à coup sûr. L'incertitude reste ainsi une propriété des schèmes.

L'analyse des schèmes passe inévitablement par l'analyse des conduites, mais le schème n'est pas une conduite, c'est un constituant de la représentation, dont la fonction est d'engendrer l'activité et la conduite en situation. Il nous faut donc analyser les composantes qui permettent le fonctionnement du schème. Cette analyse permet de mieux saisir ce qui distingue le schème d'autres concepts, qu'on confond éventuellement avec lui, comme ceux de schéma, de script, de scénario, de frame...lesquels concernent des objets, des situations ou des scènes, mais n'ont pas la fonction spécifique d'engendrer l'activité au fur et à mesure.

Définition 2 **: les composantes du schème : but, règles, invariants opératoires, inférences**

Le schème est une totalité dynamique fonctionnelle ; sa fonctionnalité est celle de cette totalité tout entière; non pas de telle ou telle composante seulement. Mais l'analyse des composantes du schème n'en est pas moins essentielle à la théorie, si l'on veut comprendre comment un schème peut être efficace ou non.

1- le but, les sous-buts, les anticipations.

Cette première composante représente dans le schème ce qu'on appelle parfois l'intention, le désir, le besoin, la motivation, l'attente. Mais aucun de ces concepts n'est à lui seul un schème ni même intégré au concept de schème. Si la représentation est composée de formes d'organisation de l'activité, et pas seulement d'images, de mots et de concepts, il est essentiel d'intégrer but, intention et désir dans le concept de schème lui-même.

De la même manière que les schèmes se composent et se décomposent hiérarchiquement , comme c'est le cas dans les exemples évoqués plus haut, le but se décline en sous-buts et anticipations. Prenons l'exemple du saut à la perche, qui illustre bien l'idée d'organisation séquentielle et simultanée de l'activité.

-organisation séquentielle : course, plantage de la perche et élévation, montée ultime et franchissement de la barre, retombée;

-organisation simultanée : gestes et mouvements coordonnés des différentes parties du corps, au moment du franchissement de la barre par exemple;

Les buts, sous-buts et anticipations précèdent et accompagnent le mouvement, et font l'objet de la part de l'athlète d'un contrôle quasi permanent pendant que l'action se déroule.

Le tracé de la demi-forteresse évoqué plus haut peut être analysé de la même manière comme une organisation séquentielle et simultanée de l'action, de la prise d'information et du contrôle. Ceci nous amène au point suivant.

2- les règles d'action, de prise d'information et de contrôle.

C'est cette composante qui constitue la partie proprement générative du schème, celle qui engendre au fur et à mesure le décours temporel de l'activité ; Les règles n'engendrent pas que l'action, mais toute l'activité, aussi bien les prises d'information et les contrôles que les actions matérielles elles-mêmes. L'approche de la cognition par les règles d'action, telle qu'elle a été proposée il y a 40 ans par Newell et Simon (1963) est donc insuffisante. En outre les règles n'engendrent pas seulement la conduite observable, mais toute une activité non directement observable, comme les inférences et la recherche en mémoire. Faute de reconnaître ces différents fonctions des règles et des processus de régulation, beaucoup de chercheurs restent finalement proches du behaviorisme. C'est le concept d'invariant opératoire qui permet d'aller plus loin dans l'analyse, justement parce qu'il introduit la question de la conceptualisation.

3- les invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte.

Les invariants opératoires forment la partie la plus directement épistèmique du schème, celle qui a pour fonction d'identifier et de reconnaître les objets, leurs propriétés, leurs relations, et leurs transformations. La fonction principale des invariants opératoires est de prélever et de sélectionner l'information pertinente et d'en inférer des conséquences utiles pour l'action, le contrôle et la prise d'information subséquente. C'est alors une fonction de conceptualisation et d'inférence. Précisons que cette vision des choses s'écarte totalement d'un modèle de type « information puis action » : les schèmes gèrent en effet de manière entremêlée la suite des actions, des prises d'information et des contrôles nécessaires, L'efficacité se construit au fur et à mesure.

La fonction des « invariants opératoires » dans l'activité est la même, en principe, que celle du "système de concepts" (sens 3 évoqué plus haut). Mais la présente terminologie permet de ne pas préjuger du caractère explicite ou non, conscient ou non, des connaissances mises en œuvre.

Un point théorique important, déjà évoqué plus haut à propos du concept de rapport scalaire, est qu'il ne faut pas confondre concepts-en-acte, et théorèmes-en-acte. Si la pensée est calcul, il faut bien qu'il existe dans son fonctionnement des éléments qui se prêtent à l'inférence, notamment aux anticipations et prédictions, et à la production des règles. Or les concepts, qu'ils soient objets ou prédicats, ne se prêtent pas à eux seuls à l'inférence parce qu'ils ne sont pas susceptibles de vérité ou de fausseté, mais seulement de pertinence ou de non-pertinence. Or les inférences vont du vrai au vrai, plus exactement de ce qu'on tient pour vrai à ce qu'il est raisonnable de tenir pour vrai. Une inférence est beaucoup plus qu'une association : le calcul associatif ne permet pas à lui seul de rendre compte du fonctionnement de la pensée. Les fonctions propositionnelles ne sont pas susceptibles de vérité ou de fausseté, puisqu'elles comportent des variables libres. Seules les propositions peuvent être vraies ou fausses. Il faut donc que des propositions fassent partie intégrante du système des connaissances évoquées ou évocables en situation, de manière que le sujet y engage son activité et ses raisonnements, fussent-ils implicites.

Par définition, un théorème-en-acte est **une proposition tenue pour vraie dans l'activité**. En fait l'étude du développement des compétences au cours de l'apprentissage ou au cours de l'expérience montre qu'un même concept peut, selon l'état de son élaboration, être associé à des théorèmes plus ou moins nombreux, plus ou moins riches, et même éventuellement faux. Le cortège des théorèmes-en-acte susceptibles d'être associés au même concept est en général très grand, notamment dans les disciplines scientifiques et techniques, de telle sorte qu'il est souvent vide de sens de déclarer que tel sujet a compris tel concept; Il faudrait pouvoir préciser quels théorèmes-en-acte il est capable d'utiliser dans telle ou telle situation. Les inférences sont des relations entre propositions, et sont enchaînées par des métathéorèmes (ou théorèmes d'ordre supérieur) comme les syllogismes aristotéliciens, ou la transitivité des relations d'ordre : a>b et b>c => a>c. Par exemple, dans une recherche très ancienne, j'avais pu observer des algorithmes spontanés de jeunes enfants entre 4 ans et demi et 8 ans, dans une situation où il leur fallait débloquer des barres encastrées les unes dans les autres. Le premier algorithme à émerger s'appuyait sur le caractère antisymétrique de la relation d'encastrement : si la barre A est encastrée dans la barre B, la barre B n'est pas encastrée dans la barre A, et il ne sert à rien de tirer sur les deux barres en même temps ou alternativement (ce que font les enfants plus petits). Il faut tirer la barre A avant de tirer la barre B. Le second algorithme observé, chez des enfants un peu plus âgés, consistait à raisonner transitivement : s'il faut tirer la barre A avant de tirer la barre B, et la barre B avant de tirer la barre C, il faut tirer la barre A avant de tirer la barre C.

La relation entre théorèmes et concepts est évidemment dialectique, en ce sens qu'il n'y a pas de théorème sans concepts et pas de concept sans théorème. Métaphoriquement on peut dire que les concepts-en-acte sont les briques avec lesquelles les théorèmes-en-acte sont fabriqués, et que la seule raison d'existence des concepts-en-acte est justement de permettre la formation de théorèmes-en-acte (propositions tenues pour vraies), à partir desquels sont rendues possibles l'organisation de l'activité et les inférences. Réciproquement, les théorèmes sont constitutifs des concepts puisque, sans propositions tenues pour vraies, les concepts seraient vides de contenu. Mais il est important de reconnaître qu'un concept-en-acte est toujours constitué de plusieurs théorèmes-en acte, dont la formation peut s'échelonner sur une longue période de temps au cours de l'expérience et du développement.

4. Les inférences

Cette dernière composante du schème est indispensable à la théorie, justement parce que l'activité en situation n'est jamais automatique, mais au contraire régulée par les adaptations locales, les contrôles, les ajustements progressifs. Les inférences sont présentes dans toutes les activités en situation, parce qu'il n'arrive jamais qu'une action soit déclenchée par une situation-stimulus, puis se déroule ensuite de manière totalement automatique, c'est-à-dire sans contrôle et sans prise nouvelle d'information. C'est possible en théorie, mais les observations montrent que cela ne peut concerner que des segments d'activité très petits, dont la fonctionnalité ne vient d'ailleurs pas d'eux seuls mais des schèmes dont ils sont partie intégrante.

Le caractère adaptable des schèmes est essentiel ; cela signifie que, si on veut les représenter formellement, il faut faire appel à des règles conditionnelles de type SI... ALORS...

SI …telle variable de situation a telle valeur, et SI …telle autre variable de situation a telle valeur…ALORS …l'action X, la prise d'information Y, ou le contrôle Z doivent être effectués.

Bien évidemment cette formalisation est celle du théoricien, pas du sujet lui-même, sauf exception : pour lui les inférences et les règles restent presque toujours implicites, et même souvent inconscientes. Les règles d'action, de prise d'information et de contrôle sont la traduction pragmatique des théorèmes-en-acte : elles traduisent principalement le fait que les variables de situation peuvent en général prendre plusieurs valeurs, et que les sujets sont en mesure de s'adapter à ces différentes valeurs.

Sans ces quatre composantes du schème (but, règle, invariant, inférence), on ne peut pas comprendre pleinement la structure de l'activité, et sa double caractéristique d'être à la fois systématique et contingente :

-systématique parce que, dans beaucoup de situations, l'activité est assujettie à des règles univoques. C'est le cas notamment pour les algorithmes en mathématiques (les quatre opérations de l'arithmétique, la résolution de certaines catégories d'équations, la recherche du PGCD ou du PPCM de deux nombres entier), et pour les procédures imposées aux opérateurs dans certains postes de travail (pilotage d'avions, de systèmes dangereux comme les centrales nucléaires, fabrication de médicaments et de vaccins).

-contingente parce que les règles engendrent des activités et des conduites différentes selon les cas de figure qui peuvent se présenter, ainsi que nous venons de le voir. Cette contingence de l'activité, est encore plus éclatante pour les situations nouvelles, lorsque le sujet ne dispose pas de schème tout prêt dans son répertoire, et doit improviser les moyens de faire face. La contingence tourne alors à l'opportunisme, et le sujet fait feu de tout bois en puisant dans ses ressources cognitives, c'est à dire dans les schèmes antérieurement formés susceptibles d'ouvrir une voie à la recherche de la solution. L'exemple évoqué plus haut du placement de données numériques est démonstratif.

Ainsi, grâce à l'articulation étroite de ses quatre composantes, le concept de schème apporte une réponse théorique que n'apporte aucun autre concept de psychologie cognitive. On voit aussi que, dans l'adaptation aux situations nouvelles (et donc à la résolution de problème), une fonction essentielle est assurée par les invariants opératoires : soit qu'ils existent déjà dans les ressources du sujet, et qu'ils soient décombinés et recombinés, soit qu'ils n'existent pas encore, qu'ils émergent en situation, et viennent s'articuler avec les invariants antérieurement formés. La fonction de conceptualisation assurée par les invariants opératoires est donc cruciale pour comprendre que les schèmes sont le lieu psychologique central d'adaptation à la nouveauté, comme ils le sont de l'adaptation à la diversité.

CONSEQUENCES THEORIQUES

Plusieurs conséquences théoriques peuvent être formulées à partir de ce qui vient d'être dit. Je vais les résumer autour de trois thèmes.

Champ conceptuel et zone de proche développement : Vygotski a eu une idée féconde en parlant de zone de proche développement, mais il n'a pu en donner des exemples concrets faute de disposer d'une description et d'une analyse assez précises des situations et des activités relevant d'une telle zone, qui en outre évolue en permanence. Cette analyse est en effet essentielle, et elle repose sur les concepts et théorèmes sollicités et partiellement disponibles. Un champ conceptuel est un ensemble structuré de classes de situations, dont certaines sont accessibles plus tôt que d'autres, justement parce qu'elles font appel à des schèmes et des théorèmes-en-acte moins sophistiqués. Un concept n'est pas associé à une seule classe de situations, ni à un seul schème, ni à un seul théorème-en-acte. En outre un concept ne se forme pas tout seul mais en relation avec d'autres : c'est ainsi que les concepts d'addition et de soustraction se développent ensemble sur une longue période de la scolarité, dans une grande variété de situations, et en liaison avec de nombreux autres concepts : ceux de partie et de tout, d'état et de transformation, de relation et de composition de relations, de mesure, de distance, d'abscisse, de translation, de nombre naturel, de nombre relatif …Un champ conceptuel est donc aussi un ensemble de concepts.

Le développement cognitif est fait de filiations et de ruptures. Le cadre des champs conceptuels permet de les placer les unes et les autres grâce aux idées de situation, de schème, de théorème-en-acte.

Signifiants, signifiés et invariants opératoires. On ne peut pas confondre signifiants et signifiés. Les mots utilisés recouvrent plusieurs significations selon la situation dans laquelle on se trouve. Mais en outre le sens accordé par l'enfant ne correspond que partiellement, et parfois pas du tout, à la signification conventionnelle des mots et des énoncés, ou à celle que leur donne le maître. Vygotski théorise utilement sur ce point dans le dernier chapitre de Pensée et Langage, lorsqu'il s'écarte de sa première définition du concept, comme « signification des mots », pour introduire l'idée de « sens ». Piaget quant à lui avait l'habitude de déclarer : « les sens, c'est les schèmes ». La théorie des champs conceptuels permet d'apporter un complément théorique : il faut distinguer entre signifiés de la langue et concepts, parce que la conceptualisation commence avec l'action en situation, et la formation des invariants opératoires. Ce sont eux qui sont responsables de l'écart entre sens et signification. En d'autres termes ce sont des ingrédients essentiels d'une théorie de la communication, comme ils le sont d'une théorie de la conceptualisation et de la représentation.

Il n'y a pas d'homomorphisme direct, même partiel entre le réel et la langue, fût-elle scientifique.

Conscience et prise de conscience. Les invariants opératoires sont la matière même de l'intuition, avec ce que cette intuition comporte de positif et d'obstacles possibles. Comme l'expérience du flux de la conscience nous fournit une certaine idée de la représentation, partielle et insuffisante, mais néanmoins essentielle, il est clair que la perception est une représentation. Le concept d'invariant opératoire permet de comprendre l'identification des objets et de leurs propriétés, avec ce que cette identification peut comporter de juste et d'erroné, d'objectif et de subjectif. Rappelons-nous l'exemple donné il y a 70 ans par Bartlett des trios promeneurs en montagne (un peintre, un géologue et un spécialiste de botanique) qui ne voient pas la même chose tout en ayant devant les yeux le même spectacle de la nature. Mais dans l'apprentissage des sciences, en particulier des mathématiques, on est conduit à accorder une place prépondérante à la construction d'objets pour lesquels il n'existe pas d'information directe par la perception. Les concepts de nombre, de grandeur, de transformation géométrique, de quotient et de produit de dimensions, représentent tous un saut par rapport à la perception. Sans l'imagination, il n'y aurait pas de science. Le constructivisme, c'est d'abord la possibilité pour les enfants comme pour les savants, de construire des objets de pensée hypothétiques qui permettent de rendre cohérentes entre elles les propriétés de l'action et les informations tirées des situations ; mais celles-ci sont élaborées, et parfois très éloignées de la perception, comme le sont les concepts de force chez Newton, d'oxygène chez Lavoisier, d'évolution chez Darwin, de gène chez Mendel, ou d'inconscient chez Freud. Il nous faut nous appuyer sur l'intuition et en même temps nous en défendre. En outre ce qui résultait d'une construction délicate pour l'enfant de 5 ans peut devenir un objet de pensée évident pour l'enfant de 8 ans, qui ne parvient plus alors à prendre de distance par rapport à cette nouvelle évidence. Il y a de nombreuses constructions contre-intuitives dans la science.. C'est à ce point crucial que se situe la prise de conscience, et que l'aide du maître ou d'autrui peut avoir la fonction que Vygotski lui attribuait dans la zone de proche développement. Le maître dispose alors de plusieurs cordes à son arc : le choix des situations, l'entraînement dans l'activité, l'aide à la sélection de l'information pertinente et aux inférences, et ce faisant à la formation des schèmes et des invariants opératoires.