



Gérard Vergnaud

Recherches en psychologie didactique

Ce document est issu du
site officiel de Gérard Vergnaud

www.gerard-vergnaud.org

Ce document a été numérisé afin de rester le plus fidèle possible à l'original qui a servi à cette numérisation. Certaines erreurs de texte ou de reproduction sont possibles.

Vous pouvez nous signaler les erreurs ou vos remarques via le site internet.

Culture et conceptualisation : l'une ne va pas sans l'autre

In Carrefours de l'éducation

2, n° 26,
2008, pp.83 à 98

Lien internet permanent pour l'article :

https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2008_Culture-Conceptualisation_Carrefours-Education-26

Ce texte est soumis à droit d'auteur et de reproduction.

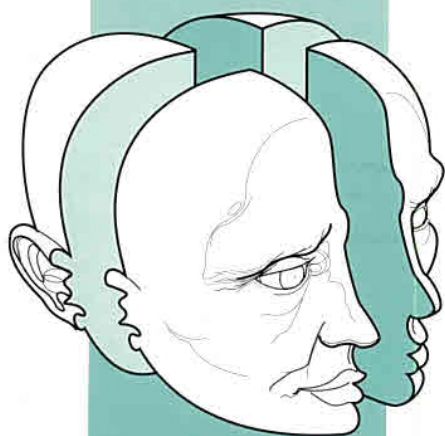
Juillet-décembre 2008

Numéro **26**

Carrefours de l'éducation

« *L'histoire des recteurs* »
coordonné par *Bruno Poucet*

« *Psychisme,
culture et apprentissage* »
coordonné par *L. Numa-Bocage*



iut
Académie
d'Amiens

UNIVERSITÉ
de Picardie
Jules Verne
PIPS/RICE

Culture et conceptualisation ; l'une ne va pas sans l'autre

Pratiques quotidiennes et connaissance scientifique

Gérard Vergnaud

Directeur de Recherche émérite au CNRS

Equipe Conception, création, compétences et usages

Laboratoire Paragraphe Université Paris 8

Résumé : *Le présent article vise à illustrer la nécessité d'une analyse conceptuelle des pratiques culturelles et professionnelles. Il existe toujours des connaissances importantes dans les pratiques, ici dans les pratiques mathématiques des paysans siamou (du Burkina Fasso) et dans les apprentissages des futurs travailleurs du bâtiment, élèves de LEP dans la région parisienne. Au delà de ces exemples se pose la question proprement didactique de l'usage des savoirs quotidiens dans l'enseignement, et des relations susceptibles d'être établies avec le savoir savant.*

L'importance de la culture pour l'école n'est pas à démontrer. Ce qui n'est pas clair par contre, c'est la manière, je devrais dire « les manières » dont l'école s'inspire ou peut s'inspirer de la culture : par exemple entre la transposition dans la classe des connaissances mathématiques du quotidien et la transposition des idées de haut niveau des mathématiciens professionnels d'aujourd'hui ; ou encore entre la littérature plus ou moins journalistique des kiosques de gare, et les œuvres marquantes qui forment le patrimoine littéraire de l'humanité, de Sophocle à Rimbaud en passant par Shakespeare, Cervantès, La Fontaine ou Victor Hugo . Les deux approches ont du sens, et devraient pouvoir être combinées ; mais comment ?

La culture est multiple, et c'est une faute de ne pas en voir le contenu conceptuel profond, en raison d'une conception trop étroite, soit aristocratique (laquelle s'intéresse aux manifestations les plus exceptionnelles de la science, de la littérature, de la musique et des arts), soit anthropologique (laquelle s'intéresse plutôt aux différences entre les cultures de différentes communautés, notamment à travers les écarts qu'elles expriment par rapport aux cultures dominantes). Des cultures variées coexistent dans une même société, mais il existe aussi une culture partagée par tous, comme c'est le cas en France : les habitudes du quotidien, les institutions, notamment l'école, contribuent à la formation d'une culture partagée. C'est probablement dans le cadre de l'école qu'on a le plus de chances d'établir des liens entre les deux faces de la culture ; celle des disciplines universelles et celle des spécificités culturelles et professionnelles puisque, en permanence, se forment des cultures contrastées ; en fonction des quartiers et des régions, des religions, des langues parlées à la maison, des valeurs transmises par les familles, et aussi des activités professionnelles et du niveau de formation des individus.

La présente contribution est celle d'un psychologue du développement et d'un didacticien des mathématiques, pas d'un anthropologue. La question principale que j'aborde ici est celle de la réconciliation, ou simplement de la conciliation, entre une mathématique savante et une mathématique utile aux futurs professionnels que seront les ouvriers, les techniciens, les agriculteurs, les commerçants, et les « quotidiennistes » en entendant par ce néologisme les utilisateurs des mathématiques au quotidien que nous sommes tous, à un niveau ou à un

autre . Vygotski avait abordé cette question en son temps, d'une certaine manière, en opposant la formation des concepts scientifiques ou académiques, à celle des concepts quotidiens. Il désignait alors les contrastes entre la formation des concepts scientifiques et celle des concepts quotidiens, en invoquant le rôle respectif du langage dans le développement des concepts scientifiques et celui de l'expérience dans le développement des concepts quotidiens, le caractère local de ces derniers opposé au caractère général des concepts scientifiques, et enfin le fait que les concepts scientifiques, à la différence des concepts quotidiens, forment des systèmes (Vygotski,1985 chapitre 6, Vergnaud, 2000). Les mathématiques utilisées dans certaines communautés africaines sont un bon exemple de mathématiques du quotidien, souvent associées à des pratiques professionnelles ou quasi professionnelles. Elles sont ainsi une référence intéressante pour le rapprochement entre culture et conceptualisation.

L'exemple des paysans siamou

Les analyses rapportées ci-après sont empruntées à la thèse soutenue par Kalifa Traoré « *Des mathématiques chez des paysans* », qui décrit et analyse les pratiques mathématiques des paysans siamou, lesquels habitent des villages d'une petite région du Burkina Fasso. Des observations abondantes recueillies par Traoré, je retiendrai ici le cas de la vente des mangues et celui de la construction de cases.

Le dénombrement et la vente des mangues

Concernant les situations d'évaluation auxquelles cette vente donne lieu, je relève deux phénomènes singuliers : le premier est que les quantités de mangues, sont comptées sur l'arbre avant d'être cueillies par l'acheteur, et sont l'objet d'une évaluation directe en « *argents* », alors qu'elles pourraient évidemment être dénombrées avant qu'en soit calculé le prix ; le deuxième phénomène intéressant est que le système de numération siamou comporte plusieurs sortes de groupements, qui ne sont pas des puissances de dix. Pour corser la situation, il existe des groupements différents pour la monnaie et pour les quantités discrètes que sont les mangues.

Un « *argent* » est une unité monétaire courante, qui représente 5 francs CFA, et qui correspond à un billet de 5 francs. Mais quand il s'agit de compter des quantités discrètes (des « *choses* » comme disent les Siamou), ce sont d'autres groupements qui sont couramment utilisés : *fu* (dix), *kar* (vingt), permettent de compter jusqu'à vingt neuf en juxtaposant au groupement de dix ou au groupement de vingt les mots correspondants aux neufs premiers nombres. C'est ce que les Siamou appellent le « *petit comptage* ». Pour les comptages plus grands, jusqu'à deux cents, on peut utiliser la base vingt (*cinq vingts, six vingts, sept vingts*) et aussi utiliser un mot nouveau, « *kpénlkpénin* » (dont la valeur est cent soixante), qui constitue de ce fait un nouveau groupement : 180 devient alors 160 et 20, et 190 devient 160 et 30). A partir de 200, et jusqu'à 400, on a un nouveau système, qui obéit au même principe que le petit comptage. Une particularité supplémentaire est que le symbole « *et* » de la composition additive n'est pas le même tout au long du système : « *ami* » pour les petites quantités que sont les unités, « *ato* » pour les quantités plus grandes que sont les différents groupements. 400 est un nouveau groupement, qui peut être composé additivement avec les nombres inférieurs à 200 jusqu'à 800, lequel peut aussi s'exprimer comme deux fois 400. Les quantités

d'argent s'expriment soit en « *argents* », avec la signification vue plus haut de 5 francs CFA, soit en unités équivalentes de la langue dioula, avec cette particularité que le dioula n'est pas utilisé pour les nombres inférieurs à 29. En siamois on utilise aussi un mot correspondant à « *tas* » pour parler de plusieurs groupements de même nature, par exemple « *vingt argents en deux tas* », signifie 40 argents. De même, *karkweln* (100) est composé comme « *cinq vingts* ». Pour les nombres plus grands, les Siamois utilisent d'autres groupements encore, comme « *chèvre* » pour 1000 (construit comme 800 plus 200), et « *serpent-mère* » pour un million (cette fois il s'agit de francs CFA).

Il n'est pas besoin d'un long commentaire pour remarquer que les compositions additives et multiplicatives s'appliquent à plusieurs sortes d'unités et de groupements, un peu comme en français la date « dix sept cent quatre vingt neuf » est structurée par des formes tantôt additives (dix sept), tantôt multiplicatives (dix sept cent, quatre vingt), et à nouveau additives (quatre vingt neuf).

La vente de mangues est une situation moins complexe que la vente de céréales, dans laquelle intervient le mesurage (d'ailleurs effectué en volume et non en poids). Mais bizarrement les mangues, qui pourraient être d'abord dénombrées avant qu'on leur attribue un prix, sont directement associées à leur valeur monétaire, de telle sorte que le nombre effectif de mangues est purement et simplement ignoré par les personnes chargées de l'évaluation. On reconnaît là le fait que les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire sont solidement inscrites dans les schèmes des paysans et des commerçants : il revient au même de compter directement avec des prix ou avec les objets dont on connaît le prix :

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

$$kf(x) = f(kx)$$

La construction des cases

Les Siamois n'utilisent guère les instruments de géométrie comme le compas et l'équerre, bien que ces instruments soient parfaitement adaptés à la construction des cases rondes (destinées aux femmes) et des cases rectangulaires (destinée aux hommes). Ils ne mesurent même pas les longueurs (rayon du cercle ou côtés du rectangle) mais pratiquent une évaluation directe, à partir d'un modèle. Ils ne mesurent pas les angles, et n'ont d'ailleurs pas d'instrument pour cela. Pour faire bref, je retiendrai deux pratiques, intéressantes du point de vue de leur contenu mathématique. La première concerne le fait que le toit a une pente qui doit être prise en considération lorsqu'on le fabrique. Un emplacement est réservé à cette fabrication, à côté des murs déjà montés de la case. Les bambous utilisés doivent être plus longs que le rayon de la case circulaire, ou que les demi-côtés de la case rectangulaire. Pour s'assurer de cela, les Siamois prennent une tige de bambou d'abord trop longue et la mettent en position, puis la coupent à la dimension voulue. Ils recherchent ainsi, de manière pragmatique, sans instrument de mesure, la dimension optimale. Pour les toits des cases rectangulaires d'ailleurs, ils se donnent un peu de marge, en commençant par les bambous les plus longs, ceux qui viennent en diagonale.

Les diagonales, justement, sont utilisées pour résoudre un problème d'angle, dès le tracé du plan de la case rectangulaire, avant la construction des murs: si l'on n'y prête pas garde en

effet on peut, même en prenant les précautions nécessaires concernant les côtés du rectangle (côtés opposés égaux), se retrouver avec des angles inégaux, obtus pour certains, aigus pour les autres, en tous cas ne respectant pas cette propriété caractéristique des rectangles, d'avoir quatre angles droits. Tous les parallélogrammes ont en effet des côtés opposés égaux. Or les rectangles ont une autre propriété caractéristique que leurs quatre angles droits, qui les distingue des autres parallélogrammes, celle d'avoir des diagonales égales. C'est justement cette propriété qu'utilisent les Siamous pour contrôler les angles ; et on les voit en effet prendre avec une corde la mesure d'une diagonale et la reporter sur l'autre. Ils peuvent alors ajuster les angles pour que cette propriété des diagonales du rectangle soit respectée, et par voie de conséquence celle des quatre angles droits. Traoré exprime le théorème-en-acte suivant « Les diagonales d'un rectangle sont égales ; la forme intermédiaire, celle qui a ses côtés opposés égaux, devient un rectangle si ses diagonales sont rendues égales ».

On voit avec ces deux exemples de la vente des mangues et de la construction de cases que les pratiques quotidiennes des Siamous s'alimentent à des conceptualisations qui sont loin d'être triviales, et qui représentent même des connaissances de haut niveau, qu'il est possible de décrire dans des termes que ne récuseraient pas des professeurs de mathématiques ordinaires, pourvu qu'ils ne soient pas sourds à l'ethnologie.

Une expérience dans un LEP en France

C'est une orientation sensiblement différente de celle ouverte par Vygotski que je souhaite proposer et illustrer ici : marier deux finalités, selon moi complémentaires, qu'on peut poursuivre quand on enseigne les mathématiques à des élèves qui ne se destinent pas à des métiers scientifiques et techniques impliquant des mathématiques sophistiquées : d'une part leur fournir des connaissances et des raisonnements directement utilisables dans leur profession, d'autre part les amener à une conscience assez claire des raisons mathématiques de l'efficacité des techniques enseignées. La suggestion est de partir de situations fortement contextualisées par des finalités professionnelles ou quasi professionnelles, et de leur associer en même temps un analyse conceptuelle de bon niveau, permettant de faire le lien avec des mathématiques plus savantes.

En fait les élèves des lycées professionnels et des centres de formation d'apprentis ne sont pas les seuls concernés par une entreprise comme celle que je vais esquisser. Ce qui, par hypothèse, peut être fécond pour des élèves n'ayant pas de goût particulier pour les mathématiques, peut aussi être fécond pour des élèves de « l'enseignement général », qui ne rejettent pas les mathématiques mais qui n'en aperçoivent pas pour autant l'ancrage fonctionnel, lequel contribue pourtant à leur donner du sens. On sait bien qu'un élève peut réussir sans se représenter les tenants et aboutissants de ce qu'on lui enseigne, ni du côté de sa valeur intellectuelle, ni du côté de sa fonction sociale. Mais cela est dommageable à tous, justement du point de vue de la culture.

Vygotski a certainement vu juste lorsqu'il a pensé le développement de l'enfant en termes d'appropriation de la culture et non pas seulement en termes de construction individuelle. Il a aussi vu juste lorsqu'il a mis en avant le rôle de l'adulte (et donc de l'enseignant) comme médiateur, et le rôle important des signes et des formes symboliques dans les processus

d'appropriation. Pour faire court, on peut dire que les signes, langagiers ou non langagiers, sont justement ce qui renvoie à une référence partagée dans la communication ; de ce fait, ils sont un instrument important de transit de la culture, entre la communauté adulte et le sujet en développement, même s'ils n'en sont pas le seul instrument. La recherche en didactique nous a appris, en effet, que les situations construites par l'enseignant à des fins d'apprentissage et de prise de conscience, sont aussi un instrument d'appropriation de la culture. La présente contribution essaye de combiner l'utilisation des deux instruments, situation et symbolisme.

Premier exemple : L'objectif était de permettre à des élèves de lycée professionnel de 4^{ème} de se familiariser avec certains calculs de maçonnerie, et en même temps de mieux saisir les propriétés de la proportionnalité, notamment de faire la différence entre la composition par concaténation de plusieurs fonctions linéaires, lorsque l'arrivée de la précédente sert de départ à la suivante, et la composition par produit de deux fonctions linéaires, lorsqu'une variable est proportionnelle à chacune de deux autres variables, indépendantes entre elles.

On présente aux élèves les informations suivantes :

Monsieur Félix, entrepreneur de maçonnerie, passe un contrat pour la construction de 25 maisons : 12 F4, 8 F5, et 5 F6. En voici les caractéristiques :

Type de maison	surface habitable	surface d'emprise	semelle
F4	75 m ²	84,3 m ²	45,1 m
F5	84 m ²	94,6 m ²	48,7 m
F6	103 m ²	115,24 m ²	55,9 m

Comme on va s'intéresser à la fabrication des semelles, on donne aussi des informations complémentaires .

La section des semelles est de 40 cm sur 50 cm pour les trois types de maisons.

Cette première information appelle un commentaire pour le lecteur non averti : les professionnels de la maçonnerie et de la construction savent que les fondations d'une maison du type F4, F5, et F6 ont une section de semelle constante : « semelle » est le terme technique habituellement utilisé pour la fondation. Comme sa section est constante, il est suffisant, pour les professionnels, d'en connaître la longueur ; elle est fournie dans le tableau.

Mais d'autres informations sont également fournies, qui sont indispensables pour que les élèves entrent dans le processus de résolution.

Pour faire un m³ de béton, il faut 1500 kg de gravillons, 580 kg de sable et 250 kg de ciment.

Le prix de ces matériaux, à l'époque, était de 43 francs les 1000 kg de gravillons, de 40 francs les 1000 kg de sable, et de 25 francs les 50 kg de ciment .

En 5 journées de travail de 8 heures, deux ouvriers fabriquent en moyenne 90 m de semelle.

L'activité des élèves était organisée en trois temps :

-une phase d'élaboration collective de trois ou quatre questions dans de petits groupes d'élèves (la formulation donne lieu à des échanges et discussions),

-puis une phase de mise en commun et de comparaison des questions produites par les différents groupes (par exemple s'agit-il de questions différentes ou de formulations différentes de la même question ?),

-enfin une phase de placement des questions les unes par rapport aux autres dans un tableau dessiné au tableau noir, et élaboré progressivement : Qu'est-ce qui est du même ordre ? Qu'est-ce qui est différent ? Comment placer ces questions dans un tableau dont les colonnes représentent des grandeurs distinctes (par exemple des volumes de béton, des poids de sable, de ciment, ou encore des coûts ...) ; les lignes représentent chacune une référence distincte (par exemple pour un F4, pour cinq F6... ou encore pour telle quantité de béton, ou de sable, ou de ciment...).

Ainsi la question « *Combien faut-il de ciment pour un F4 ?* » et la question « *Combien faut-il de ciment pour une tonne de béton ?* » viennent dans la même colonne mais pas dans la même ligne ; à l'inverse la question « *Combien faut-il de sable pour une tonne de béton ?* » vient dans la même ligne que la question précédente mais pas dans la même colonne. Cette activité de formulation de questions puis de placement des données et des questions dans un tableau est inhabituelle dans l'enseignement des mathématiques. Le but recherché est d'amener les élèves à mettre en rapport les formes langagières et leurs variations avec les grandeurs en jeu, inconnues ou données.

Dans un second temps, les élèves sont invités à répondre à certaines des questions posées, et à utiliser les différents moyens par lesquels on peut calculer telle ou telle grandeur. C'est à ce moment que sont mis en oeuvre les schèmes et les invariants opératoires pertinents (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte). Ils sont relativement nombreux ; aussi une partie de l'activité va-t-elle être consacrée à la comparaison des chemins alternatifs conduisant au même résultat.

Surtout, le maître va essayer de faire prendre conscience aux élèves, par des moyens langagiers et par des représentations graphiques ad hoc, des ressemblances et des différences entre les raisonnements recueillis. Les observations rapportées ici sont donc une contribution à la recherche sur les rapports entre symbolisation et conceptualisation, en même temps que sur les rapports entre mathématiques du quotidien professionnel et mathématiques savantes.

1- Problèmes d'énonciation

Voici d'abord quelques exemples des difficultés rencontrées par les élèves.

Comment formuler l'idée de tout ?

« *Quelle est la longueur totale des semelles pour l'ensemble de toutes les maisons ?* »

Il ne faut pas moins de trois expressions, à cet élève, pour formuler l'idée de tout : *longueur totale, l'ensemble, de toutes les maisons*

Il existe heureusement des formulations plus économiques :

« *pour les semelles de toutes les maisons* »

« *nécessaire à la construction de l'ensemble des semelles* »

« *nécessaire à la construction des semelles* »

« *pour toutes les semelles* »

« *la longueur totale des semelles* »

Mais on observe en même temps que le quantificateur peut porter sur trois sortes d'objets : *les maisons, les semelles, la longueur des semelles*.

Comment supprimer la confusion, et diminuer la redondance?

Une autre difficulté concerne le fait que les élèves se réfèrent en même temps, sans les dissocier, à des grandeurs distinctes comme la quantité de béton et son coût ; d'où des formulations équivoques comme la suivante : « *A combien reviendra le tout en mètres cubes de béton ?* »

ou bien l'idée de coût est exprimée deux fois : « *Combien coûtera le prix ... ?* »

La redondance peut aussi prendre la forme de la répétition :

Après qu'on vient d'énoncer la référence à *toutes les semelles*, un élève propose la question « *Quel sera le prix de toutes les semelles ?* ». Il est alors corrigé par un autre élève de son groupe : « *Quel en sera le prix ?* » Les trois élèves du groupe observé s'exclament alors bruyamment pour souligner la sophistication et l'économie que représente l'anaphore « *en* ». C'est un exemple rare de prise de conscience concernant l'énonciation.

Remarquons qu'aucun élève ne relève la différence entre « *coût* » et « *prix* » .

Quel est l'invariant ?

« *Calculer la masse volumique d'une semelle en béton pour un F4 ?, pour un F5 ? Pour 12 F4 ?* »

L'auteur de cette série de questions est à l'évidence préoccupé de distribuer la même question sur plusieurs valeurs paradigmatiques (un F4, un F5, 12 F4) ; mais il prend alors comme variable possible une grandeur, la masse volumique, malencontreusement invariante.

Cela illustre les relations délicates qu'entretiennent conceptualisation et formulation.

Un autre exemple est fourni par l'activité combinatoire à laquelle se livrent les élèves, pendant la phase de mise en commun, notamment au moment de l'établissement d'un tableau représentant une certaine classification des données et des questions.

Il n'est pas trop difficile à des élèves de quatrième, même lorsqu'ils sont en difficulté scolaire, de distribuer la même catégorie de questions sur plusieurs quantités de même type :

« Quelle quantité de ciment faut-il pour un F4 ?... puis pour 12 F4 ? puis pour un F5 ? »

Il est plus délicat d'opérer cette distribution sur des grandeurs de type différent :

« Quelle quantité de ciment faut-il pour un F4 ?... puis pour un mètre cube de béton ? puis pour 1000 kg de sable ? »

ou encore de distribuer sur une même référence des questions portant sur des grandeurs différentes :

« Combien de sable faut-il pour 12 F4 ? puis combien de gravillon pour 12 F4 ? Puis combien de ciment pour 12 F4 ? »

De nombreuses prises de conscience interviennent alors chez les élèves : les questions des uns, inattendues par les autres, provoquent l'éveil de la possibilité de variations systématiques. Un élève a même formulé un commentaire digne d'un linguiste :

« On peut varier les différentes valeurs... par exemple... de la phrase. »

Le mot « valeur » est précisément le terme utilisé par Saussure. L'élève ne peut le savoir évidemment : en fait il considère les grandeurs en jeu. Mais cette métaphore heureuse n'est pas sans rapport avec l'idée théorique de Saussure, de variation des différentes composantes de l'énoncé.

2- Construction d'un tableau facilitant l'analyse

Lorsque les élèves sont engagés dans cette idée de double variation (du type de grandeur sur lequel porte la question et de la grandeur de référence), il est possible de construire un tableau dans lequel on peut placer les unes par rapport aux autres à la fois les données et les questions. Et l'on peut ainsi demander aux élèves soit de désigner l'endroit où se placerait telle donnée ou telle question, soit encore de formuler la question qui se placerait à tel endroit du tableau.

Reprenons par exemple les questions posées ci-dessus et quelques autres, analogues ; et désignons-les par des lettres :

A *Quelle quantité de ciment faut-il pour un F4*

B... *pour 12 F4 ?*

C... *pour un F5 ? »*

D *Quelle quantité de ciment pour un mètre cube de béton ?*

E *Quelle quantité de ciment pour 1000 kg de sable ? »*

H *Quelle quantité de gravillon pour un F5 ?*

F Combien de sable faut-il pour 12 F4 ?
 G Combien de gravillon pour 12 F4 ?

Maisons	Quantités				Coûts				
	semelle	béton	ciment	gravier	sable	béton	ciment	gravier	sable
		1	250	1500	580				
			50.				25		
			E		1000				40
			1000				43		
1 F4			A						
1 F5			C		H				
1 F6									
12 F4			B		G				F
8 F5									
5 F6									

Le tableau permet aux élèves de prendre conscience des deux variations évoquées plus haut (quelle question, en fonction de quoi?), également de voir que la question D est inutile puisqu'elle correspond à une donnée, enfin de mesurer le décalage entre le petit nombre de questions formulées par chaque groupe d'élèves (trois ou quatre questions au maximum) et le très grand nombre de questions différentes qu'il serait possible de formuler au vu des places vides dans le tableau.

Découverte d'une distinction conceptuelle

Un incident critique survient alors, qui mérite d'être commenté, car il concerne un problème conceptuel de fond : il survient à propos des questions qui portent soit sur la longueur des semelles fabriquées par tel ou tel nombre d'ouvriers pendant telle ou telle durée de travail, soit sur le nombre d'ouvriers nécessaire, soit sur le nombre d'heures de travail nécessaire.

La première suggestion des élèves est de chercher à placer ces questions dans le tableau qu'ils viennent de construire. Mais c'est impossible, en raison du fait que la longueur des semelles

fabriquées est alors fonction de deux variables : le nombre d'ouvriers et le nombre d'heures travaillées. La différence entre fonction d'une variable et fonction de plusieurs variables est une question théorique essentielle, notamment pour l'apprentissage de la physique ; mais, dès l'école élémentaire, les élèves rencontrent cette question avec la mesure des grandeurs spatiales d'aire et de volume, et quelques autres cas de proportionnalité. Il est intéressant de remarquer, du point de vue des processus de conceptualisation, que certains élèves s'acharnent à essayer de placer les nouvelles questions dans le tableau dont ils viennent de découvrir les propriétés en le construisant. Pour qu'ils prennent conscience de cette impossibilité (et pour que l'évidence change ainsi de camp), il faut une aide substantielle de l'enseignant : celui-ci attire l'attention sur le fait que le nombre d'ouvriers et le nombre d'heures travaillées ne sont pas proportionnels l'un par rapport à l'autre, et que par conséquent ces deux quantités ne peuvent pas être représentées sous la forme de deux colonnes parallèles, comme c'est le cas dans le tableau qui vient d'être construit. Il faut donc un autre type de présentation.

C'est l'enseignant qui propose le tableau de double proportionnalité ci-dessous, dans lequel la longueur de semelle fabriquée est proportionnelle à la fois au nombre d'ouvriers (ligne à ligne quand le nombre d'heures travaillées reste constant), et au nombre de jours travaillés (colonne à colonne quand le nombre d'ouvriers reste constant).

Ouvriers Jours	1	2	N	7	10
1.	U				
5		90	280		S
T					1400
12				Q	

- S *Combien 10 ouvriers fabriquent-ils de semelle en 5 jours ?*
- N *Combien faut-il d'ouvriers pour fabriquer 280 mètres de semelle en 5 jours ?*
- T *Combien de jours pour fabriquer 1400 mètres de semelle avec 10 ouvriers ?*
- Q *Combien de semelle en 12 jours avec 7 ouvriers ?*
- U *Quelle longueur de semelle par ouvrier et par jour ?*

Le cas des relations entre trois variables est très général ; le plus souvent ces variables ne sont pas prises dans une relation de proportionnalité ; ici elles le sont, et la longueur des semelles fabriquées est proportionnelle à la fois au nombre d'ouvriers et au nombre de jours travaillés. La fonction mathématique pertinente est la fonction bilinéaire. Dans le cas du premier tableau, dans lequel les quantités de béton, de ciment, de gravier, et de sable, et les coûts respectifs sont tous proportionnels, la fonction linéaire est pertinente, justement parce que l'une des variables possibles reste constante : par exemple la quantité de ciment par mètre cube de béton, ou la quantité de sable par mètre cube de béton... ou le coût du ciment, ou le coût du sable... La proportionnalité simple est un cas particulier de la proportion double.

Outre cette prise de conscience, dont il ne faut pas minimiser l'importance, les élèves rencontrent la question de l'indépendance des deux proportionnalités : de la production par rapport au nombre d'ouvriers et au nombre de jours travaillés. Ils ont aussi l'occasion de percevoir la relation dialectique entre variable et constante, tant du point de vue de l'énonciation que du point de vue mathématique. Il n'est pas excessif de prétendre avoir établi ainsi une relation de sens entre la mathématique du professionnel et la mathématique du mathématicien, voire de l'épistémologue.

Problèmes de raisonnement et de calcul

Tant qu'il n'y a pas résolution de problème, c'est-à-dire raisonnement et calcul, on ne peut pas véritablement prétendre que les concepts en jeu dans les questions, dans leur énonciation et dans l'organisation de leurs rapports, sont véritablement compris. Aussi la phase suivante du travail des élèves est-elle décisive. Les élèves se lancent dans des calculs, en explicitant parfois leur raisonnement, c'est-à-dire les raisons de leur choix, mais le plus souvent sans expliciter quoi que ce soit, sinon en bredouillant quelques mots concernant les grandeurs en jeu, rarement leurs relations. Et pourtant c'est dans ces relations que réside la raison des cheminements suivis.

Voici quelques exemples de cheminements :

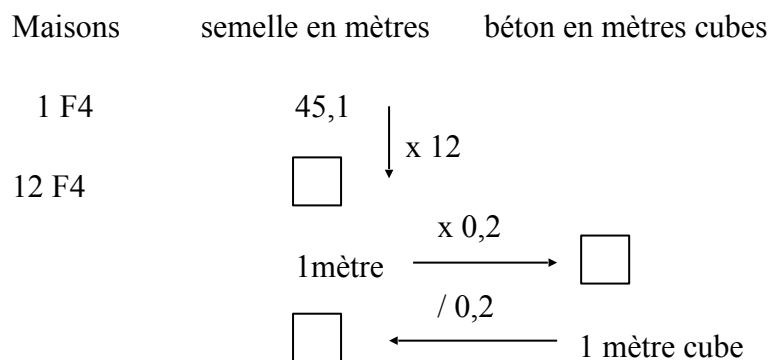
Calculer la longueur de semelle correspondant à douze F4, en multipliant par 12 la longueur correspondant à un F4. Ce raisonnement est relativement familier pour les élèves depuis le CE2, mis à part le fait qu'il faut l'appliquer ici à un nombre décimal (45,1 mètres) ; il en va de même pour le calcul de la longueur correspondant à huit F5 (48,7 mètres pour un F5), ou à

cinq F6 (55,9 mètres pour un F6). Le théorème en acte mis en œuvre dans cette première opération est en fait le théorème d'isomorphisme multiplicatif de la fonction linéaire

$$f(kx) = kf(x)$$

Remarquons au passage que le nombre k exprime un rapport (scalaire) entre grandeurs de même nature : entre des maisons dans le premier membre, et entre des longueurs de semelle dans le second membre. Il n'en sera pas de même dans d'autres raisonnements, à commencer par celui rapporté maintenant.

En effet la facilité relative de ce premier raisonnement se heurte immédiatement à une difficulté : comment continuer ; comment passer de la longueur des semelles au volume de béton correspondant, et aux poids respectifs de ciment, de gravier et de sable ? La longueur de semelle est un concept pragmatique et scientifique tout à la fois, propre à la communauté des professionnels du bâtiment : dans la mesure où la section des semelles est constante, comme nous l'avons vu plus haut (50 cm sur 40 cm), la longueur est une information suffisante pour que les maçons accomplissent leur tâche. Le calcul du volume de béton correspondant à une longueur de semelle de 1 mètre consiste donc à multiplier cette longueur par l'aire de la section de semelle exprimée en mètres : $0,5 \times 0,4$, soit $0,2 \text{ m}^2$. Cette connaissance est d'abord fonctionnelle, mais elle est aussi conceptuellement importante, parce qu'elle représente un nouvel aspect de l'économie de l'information, et de la diminution de la redondance : l'information utile est la valeur fournie par une seule variable ; les constantes ne demandent pas de précision supplémentaire si elles sont connues dans le métier. Le tableau ci-dessous illustre graphiquement les deux questions que nous venons de soulever : la multiplication (verticale) par un scalaire, et le rapport de proportionnalité (horizontal) entre deux variables :



On n'échappe pas à une analyse conceptuelle et épistémologique de la culture professionnelle, pas davantage que de la culture savante.

Retournons au tableau qui réunit les informations concernant la fabrication du béton : les quantités respectives de ciment, de gravier et de sable et les coûts respectifs. On peut observer que les quantités en jeu peuvent avoir un rapport simple, soit avec des grandeurs de même nature (50 kg de ciment et 250 kg de ciment, c'est-à-dire 5 fois plus, nombre sans dimension), soit avec des grandeurs de nature différente (50 kg de ciment et son coût de 25 francs, soit 2 kg de ciment pour un franc, quotient de dimensions).

On observe que les élèves, dans leurs raisonnements, prennent mieux en compte les rapports scalaires et, plus généralement les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire, que les relations entre grandeurs distinctes : entre quantités de matériaux et coûts, entre quantités de matériaux différents, ou encore entre volume de béton et longueur de semelle comme nous venons de le voir.

Concernant les fonctions de deux variables, déjà évoquées à propos de la quantité de semelle fabriquée en fonction du nombre d'ouvriers et du nombre de jours travaillés, un commentaire supplémentaire s'impose. En effet si l'on tient constant le nombre de jours travaillés (une même ligne du tableau de double proportionnalité), il n'est pas difficile aux élèves de voir qu'il s'agit d'une proportion simple, analogue à celles déjà vues, et d'appliquer un raisonnement scalaire (n fois plus d'ouvriers, n fois plus de semelle). Même phénomène si l'on tient constant le nombre d'ouvriers (une même colonne).

Ce qui trouble les élèves c'est la variation simultanée du nombre d'ouvriers et du nombre de jours travaillés. Il est donc crucial de faire comprendre aux élèves que le mode de composition des deux proportionnalités est cette fois celui du produit, et non celui de l'enchaînement, comme c'était le cas avec la longueur de semelle, le volume de béton, les quantités de matériaux, et les coûts.

C'est un point qui n'est guère soulevé dans l'enseignement habituel de mathématiques, et il intéresse en fait les élèves de l'enseignement général, pas seulement ceux des enseignements professionnels. Il n'est donc pas excessif de proposer que des exemples comme celui exposé ici soient introduits dans l'enseignement général, pour donner du sens aux différences et aux parentés entre proportion simple et proportion double ou multiple, à la dépendance et à l'indépendance des informations entre elles ou des questions entre elles, aux relations dialectiques entre invariance et variation.

En effet, la production de semelle est proportionnelle de manière indépendante au nombre de personnes N, et à la durée J du séjour; elle est donc proportionnelle au produit et il serait donc possible de construire et d'appliquer une formule qui mette bien en évidence ce produit :

$$S = k N J$$

On peut douter de l'avantage d'une telle formule pour les élèves considérés ici, de même qu'on peut récuser la formulation savante du théorème spontanément utilisé par certains élèves, rares il est vrai, lorsqu'ils utilisent « en acte » les propriétés de la fonction bilinéaire.

Deuxième exemple : Au cours d'une expérimentation au cours moyen 2^{ème} année, nous avons mis en scène « *la préparation d'un séjour en classe de neige pour 50 enfants pendant 28 jours* ». En recherchant dans les documents à leur disposition, les élèves avaient trouvé l'information « *il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants* ».

Il existe bien entendu plusieurs moyens de procéder :

- Passer par la consommation d'un enfant par jour, ou d'un enfant pour une semaine ;
- Raisonnement sur la proportionnalité simple durée/consommation
- Raisonnement sur la proportionnalité simple nombre d'enfants/consommation...

En CM2 les élèves mettent un peu de temps à adopter un raisonnement et à conduire les calculs nécessaires. Il se trouve qu'un élève, pas particulièrement remarquable habituellement, se lève et déclare : « *c'est facile , 5 fois plus et 4 fois plus, ça fait 20 fois plus !* »

Quelle connaissance a-t-il utilisée ? Il lui serait bien difficile de la formuler dans des termes un peu généraux, et pour cause, puisqu'il s'agit d'un théorème des fonctions bilinéaires ;

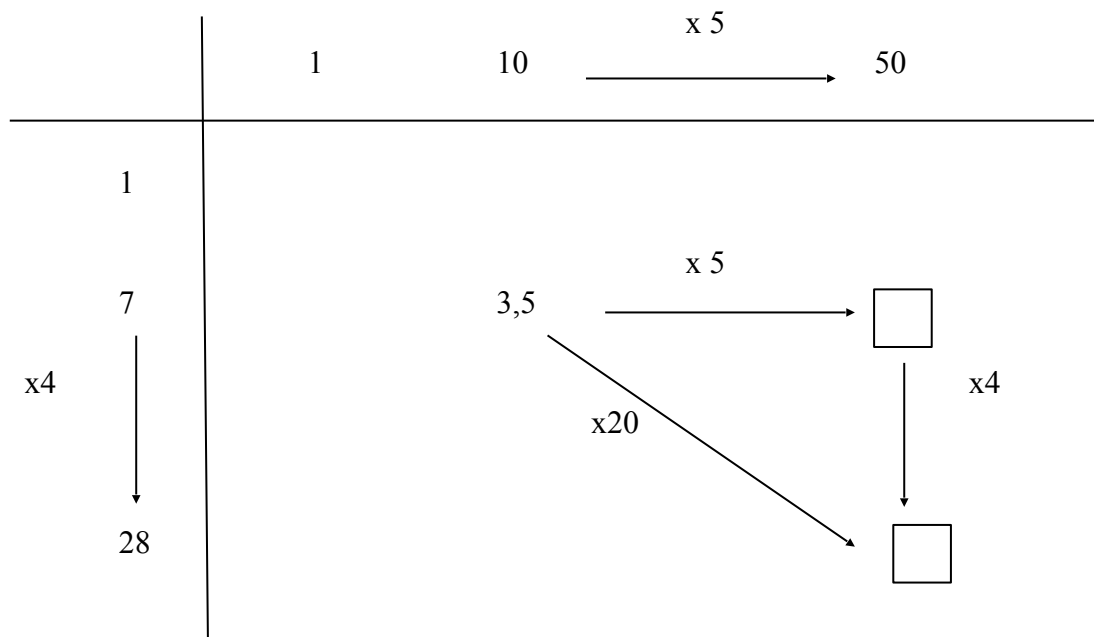
$$f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1.n_2 f(x_1, x_2)$$

Dans le présent exemple

$$f(5 \text{ fois } 10 \text{ enfants}, 4 \text{ fois } 7 \text{ jours}) = 5 \text{ fois } 4 \text{ fois } f(10 \text{ enfants}, 7 \text{ jours})$$

Les deux rapports scalaires 5 fois plus et 4 fois plus sont multipliés l'un par l'autre pour donner un nouveau rapport scalaire 20 fois plus

La question didactique se pose de représenter cette propriété du raisonnement de l'enfant, pour lui-même déjà, de manière qu'il se représente la structure de son intuition ; et pour les autres élèves aussi, de manière qu'ils profitent de ce raisonnement singulier. C'est pourquoi nous avons provoqué les élèves avec un tableau supplémentaire, et tenté avec eux d'en analyser les propriétés.



Comme il n'y a pas de miracle en didactique, on n'espère pas, ce faisant, que les élèves vont saisir du premier coup ce qu'est une fonction de deux variables, ou une proportion double. Mais avec un commentaire sur les variations ligne à ligne et colonne à colonne, il est possible de les familiariser avec ces concepts, nouveaux pour la plupart d'entre eux. C'est déjà beaucoup !

Quelles leçons tirer de ces expériences ?

La première leçon me paraît être que l'idée de culture demande à la fois la différenciation entre des cultures distinctes, qui relèvent de communautés distinctes, et en même temps la recherche de ponts entre elles. La conceptualisation les concerne toutes, en dépit des formes contrastées que celle-ci peut prendre, dans l'activité quotidienne de ces communautés. Les choses sont telles qu'on ne peut pas parler d'une culture universelle ; mais en même temps ce serait une erreur d'appréciation, et un renoncement dangereux, que de rater les occasions de faire le lien entre la culture de tous les jours d'une communauté particulière (professionnelle ou linguistique par exemple), et la culture savante et classique de l'école ordinaire.

La seconde leçon à mes yeux est que les exemples intéressants à retenir pour enrichir la base de situations empiriques susceptibles d'être introduites avec profit dans la classe, devrait être élargie à des références et des pratiques différentes, éventuellement très éloignées des références habituelles des enseignants et des responsables de l'éducation d'aujourd'hui. Les jeux « mathématiques » africains sont de ce type et sont d'ailleurs utilisés avec bonheur par certains enseignants. L'histoire des sciences, de la littérature, des techniques et des arts fournit aussi des exemples importants. Mais la variété des pratiques humaines reste mal connue, et on est loin encore de saisir le bénéfice que leur connaissance peut apporter à l'école. L'anthropologie du savoir et des pratiques culturelles reste aujourd'hui un domaine peu avancé, en tout cas peu avancé dans ses utilisations possibles à l'école. La transposition didactique aurait pourtant là un bon sujet de réflexion et de proposition.

La troisième leçon à retenir concerne la question, proprement pédagogique, du rapport entre les situations empruntées à une culture réputée non scolaire, et leur transposition dans la classe ; entre les questionnements des élèves en situation, et les propositions de solution et de représentation apportées par l'enseignant. Le maître, dans son rôle de médiateur, n'apporte pas que des occasions de réfléchir, d'agir, et de construire ; il apporte aussi des solutions, celles élaborées par d'autres que lui, et les siennes propres, issues de son expérience et de sa capacité à innover en situation. Les formulations qu'il utilise font poids, ainsi que les représentations symboliques, lesquelles font ressortir, éventuellement mieux que les représentations langagières, la structure conceptuelle des relations en jeu et les points d'impact des opérations du sujet en situation. Tel est le cas des schémas, des tableaux, des graphiques et autres algèbres utilisés abondamment aujourd'hui.

Enfin une dernière leçon concerne la relation entre la conceptualisation qui intervient dans l'action sans être nécessairement formulée, et le travail dans le langage et sur le langage qui permet de donner une forme communicable à cette conceptualisation. Ce passage, d'une forme opératoire de la connaissance à une forme prédicative faite d'objets, de propriétés et de relations énoncés, est l'un des enjeux majeurs de l'école, à condition qu'on n'oublie pas que la culture est faite de situations, d'actions et de pratiques, et pas seulement de mots et de textes. De ce point de vue, Vygotski a sans doute péché, par excès d'importance accordé au langage. Sa vision du concept est presque exclusivement liée au langage : « le concept, c'est la signification des mots » répète-t-il dans plusieurs chapitres de son ouvrage « Pensée et langage ». Certes il se corrige lui-même dans le dernier chapitre, et souligne alors que l'enfant

à l'école donne aux mots qu'il entend un sens qui dépend de son expérience ; mais le message principal de Vygotski n'en est pas pour autant ébranlé, puisqu'il fait du langage l'instrument psychologique avec lequel le sujet agit sur lui-même, et se transforme. C'est faire bon marché des autres formes de l'activité, qui lui permettent aussi de s'adapter au réel et qui ne sont pas réductibles à l'activité langagière, fût-elle intérieure. D'ailleurs l'intériorisation ne concerne pas que le langage, mais aussi l'action, les gestes, et les processus perceptifs par lesquels le sujet sélectionne l'information pertinente pour l'action et s'accommode aux objets et à leurs propriétés.

Au fond de tout cela, c'est d'une conception de la représentation qu'il s'agit. La théorie de la représentation dont nous avons besoin pour les recherches sur le développement, l'apprentissage et l'expérience, repose à la fois sur les composantes essentielles que sont la conscience et les formes langagières, certes ! mais aussi sur des composantes qui ne donnent pas facilement leur nom, comme les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes et les catégories de pensée formées dans l'activité. Les invariants opératoires, pour tout dire, sont des ingrédients de base de la conceptualisation : sans eux on ne voit pas comment les mots et les énoncés entendus par le bébé dans la bouche de sa mère et de son entourage, et ceux entendus à l'école pourraient prendre du sens. La communication verbale est essentielle pour que la culture soit appropriée par l'enfant, mais elle n'est pas le tout de l'appropriation. Par exemple les concepts de semelle, de volume, de poids, de coût mis en jeu dans la situation expliquée plus haut, n'auraient guère de sens s'ils ne s'appuyaient pas sur l'expérience. Même ceux de variable et de fonction tirent leur sens des possibilités de variation et de correspondance, dont les élèves ont une certaine expérience, faiblement explicite il est vrai. Le fait de poser des mots sur ces concepts est un acte important, et on a pu mesurer aussi que des formes symboliques autres que la langue, comme les tableaux, avec les distinctions et oppositions qu'ils permettent entre lignes, entre colonnes, entre correspondances verticales, horizontales, et double correspondance, contribuent aussi à la conceptualisation. Vygotski avait aperçu ce phénomène lorsqu'il parlait du symbolisme en lui donnant un sens plus général que celui du seul langage.

Deux autres remarques me viennent à l'esprit, qui concernent l'histoire et l'activité. La culture a une histoire, et l'individu aussi. Il en résulte des évolutions, des innovations et des découvertes, des adaptations au nouveau. Tout autant que le psychologue et l'éducateur, qui doivent prendre en compte la longue durée du développement de l'élève en fonction de l'histoire de ses apprentissages et de sa vie extrascolaire le cas échéant, l'historien (l'historien de l'éducation en particulier) doit prendre en compte les évolutions des savoirs et des compétences que la société attend des individus. Les processus d'adaptation concernent aussi bien la société et sa culture que les élèves et les individus qui sont en position d'apprendre, que ce soit dans une formation dédiée à l'apprentissage, ou dans l'expérience tout court.

Mais qu'est-ce qui s'adapte ? Et à quoi ? C'est sur ce point qu'intervient la question de l'activité et de ses formes d'organisation. En effet nous nous adaptons au cours de notre activité ; encore faut-il identifier les formes qui s'adaptent. Ce sont les schèmes qui s'adaptent, et ils s'adaptent à des situations. De telle sorte que les formes d'organisation de notre activité (gestuelles, intellectuelles, affectives, sociales, langagières) se transforment par la rencontre avec des situations nouvelles, tout en prenant leurs racines dans le répertoire

existant des formes déjà construites. Ceci est vrai aussi pour les compétences et les savoirs produits par la culture, et il serait dommage de donner au concept d'habitus un sens tel qu'on en verrait la stabilité et pas l'évolution. Comme les schèmes, les habitus s'adaptent.

Brève bibliographie

Saussure F. (de) (1916) Cours de linguistique générale. Paris. Payot.

Traoré K. (2007) Des mathématiques chez des paysans. Montréal. Editions Bande didactique.

Vergnaud G. (1996) La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed). Didactique des Mathématiques. Delachaux et Niestlé. Lausanne.

Vergnaud G. (2000) Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps. Paris. Hachette Education.

Vygotski L. (1985, 1934) Pensée et langage. Paris. Messidor/Editions sociales.