# Activité, développement, représentation


## In Colloquium Didactique des Mathématiques, Paris
**Conférence plénière invité**

2009 (16 janvier)
Paris, France

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2009_Activite-Developpement-Representation_Colloque-Paris

# COLLOQUIUM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 2008
# Activité, développement, représentation

Gérard Vergnaud

*Le texte qui suit a été présenté oralement le 16 janvier 2009 lors du colloquium organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). En dépit d'une réécriture, il conserve les caractères d'un exposé oral.*

Je vous remercie de m'avoir invité à discuter avec vous de mon travail, et je voudrais en profiter pour aborder des questions d'orientation, qui se sont posées à moi depuis le début de mes recherches, même si certaines de ces questions n'ont parfois trouvé de réponse dans ma conscience qu'au cours des dernières années. La prise de conscience est un processus plus lent et plus laborieux qu'il ne peut y paraître, même si ce processus est aussi ponctué par des « eurêka » importants, mais imprévus, et limités dans leur portée. Pour évoquer ces questions d'orientation je prendrai des exemples, de manière que mon propos ne soit pas un discours général de plus, et que vous puissiez vous représenter plus facilement la signification de mon propos.

Je suis psychologue et j'ai soutenu ma thèse sous la direction de Piaget en 1968 ; la soutenance était prévue pour le mois de mai 1968, et elle a été reportée en septembre, vous imaginez pourquoi. Parmi les questions qui me préoccupaient au début de ma carrière scientifique, figurait en bonne place la question du rapport du sujet avec le réel, c'est-à-dire la vieille question philosophique du réalisme, de l'idéalisme, du nominalisme, de l'objectivité. Le behaviorisme influençait encore largement les psychologues, et offrait, comme modèle princeps de la relation du sujet au réel, le couple stimulus/réponse : notamment pour conduire des recherches empiriques. Aujourd'hui je voudrais proposer, comme une meilleure théorisation, le couple situation/schème. Ce couple théorique est plus juste et plus fécond, non seulement que le couple stimulus/réponse, mais aussi que le couple objet/sujet qui nous vient de la philosophie, et qui a été emprunté par de nombreux chercheurs, en psychologie et en didactique, sans discussion suffisante d'ailleurs.

La première raison en faveur du couple situation/schème est que, si la connaissance est adaptation, comme Piaget et quelques autres grandes figures du passé nous invitent à le penser, il faut en tirer la leçon : ce qui s'adapte ce sont des schèmes, c'est-à-dire des formes d'organisation de l'activité, et ils s'adaptent à des situations. A cette raison théorique s'ajoute une raison pratique et méthodologique : situations et schèmes sont un cadre favorable au recueil de données empiriques. Cette dernière raison vaut notamment à l'encontre du couple sujet/objet, qui est essentiel mais très général, et qui n'est pas rapporté à une intention particulière du sujet ou à une question qu'il se poserait ; de telle sorte qu'on est démuni pour recueillir des données spécifiques suffisamment précises et intéressantes sur le contenu de l'activité. Loin de moi l'idée que ce serait seulement les formes d'organisation de l'activité qui s'adapteraient. L'adaptation concerne aussi la représentation des objets, et le sujet pris dans sa globalité. Mais ce sont les formes d'organisation de l'activité, les schèmes, qui sont au centre du processus d'assimilation et d'accommodation : par le choix de l'information pertinente et par l'action, par les choix subséquents de l'information et de l'action. Le décours temporel de l'activité est une source inépuisable de données, et l'on manque d'ailleurs de moyens simples et économiques pour l'étudier bien.

Un schème est beaucoup plus qu'une réponse, c'est une organisation de l'activité. Une situation est beaucoup plus qu'un simple stimulus : c'est un ensemble d'objets, de propriétés et de relations, pour lequel le sujet s'invente une activité, éventuellement avec l'aide d'autrui. Un stimulus n'est que le changement de valeur d'une des conditions de la situation ; or l'activité porte tout autant sur les conditions qui ne changent pas que sur celles qui changent. Cette raison m'a conduit à mettre la conceptualisation au centre de mes préoccupations. En effet la conceptualisation est toujours présente dans l'action, même si elle ne dit pas son nom et si elle reste largement implicite. Le couple stimulus/réponse, purement associationniste, ne permet pas d'étudier la conceptualisation du réel contenue dans les compétences complexes, lesquelles sont le défi de l'éducation et du travail, et sont constitutives de la culture et de l'expérience. Cela n'a pas empêché certains behavioristes, comme Skinner, d'appliquer à l'éducation une idéologie héritée du dressage des rats et des pigeons. L'éducation ne s'en est pas mieux portée.

Piaget n'a pas inventé le concept de schème, mais l'a emprunté à Kant et à certains psychologues néokantiens du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, qui ont abondamment nourri ce concept, mais avec une vision inspirée principalement par l'exemple de la perception (Revault d'Allonnes). C'est Piaget qui a développé le mieux, et de la manière la plus systématique, une conception du schème comme activité, en particulier avec son étude de l'imitation et de l'intelligence chez le bébé. Il a fait du schème le prototype de l'activité perceptivo-gestuelle, qu'il a appelée à tort « sensori-motrice », suivant en cela la terminologie inadéquate de l'époque. L'œuvre de Piaget est incontournable.

Pour ma part, j'ai développé le concept de schème en l'utilisant pour des activités très différentes comme les gestes et les raisonnements, et en essayant d'en donner une analyse qui permette de tisser un lien clair entre activité et conceptualisation.

**J'appelle conceptualisation, dans un sens large du terme, l'identification des objets du réel, de leurs propriétés et relations, que ces objets et propriétés soient directement accessibles par la perception, ou qu'ils résultent d'une construction.**

L'identification par la perception fait partie intégrante du processus de conceptualisation, et certains progrès au cours du développement, proviennent justement des catégories avec lesquelles est sélectionnée et jugée pertinente l'information offerte par la situation. Si la perception est une composante de la représentation (j'y reviendrai à la fin de cet exposé), on sait aussi que beaucoup de concepts scientifiques résultent d'une construction hypothétique, qui a pu faire problème au cours de l'histoire. Il nous faut donc étudier les deux processus, en même temps d'ailleurs que le rôle du langage et des symbolismes, et surtout que l'activité en situation, source incontournable de la conceptualisation.

Dans une perspective développementale, il est essentiel d'accorder du poids à ce qui fait la différence : entre une forme d'organisation de l'activité et une autre, entre une situation et une autre, entre un individu et un autre, entre un moment de l'apprentissage et un autre, entre une période de l'expérience et une autre. Or ce qui fait la différence, ce sont bien les ressources disponibles chez le sujet à l'étude. L'expérience est essentielle dans le développement à long terme, comme Dewey le pensait ; et l'on n'a pas conduit assez de recherches théoriques et empiriques sur l'expérience. Les psychologues se contentent trop de discuter des rapports entre développement et apprentissage, en gommant la question de l'expérience. La didactique aussi devrait s'y intéresser davantage, tant il est vrai que l'expérience scolaire et l'expérience extrascolaire forment un ensemble moins dissociable qu'il y paraît, et que le développement est un processus sur la longue durée.

Qu’est-ce qu’un concept ? Et comment établir le lien entre une définition possible et la recherche en didactique ? Comment tenir compte du fait que la conceptualisation se développe en situation, à travers l’activité, et à travers des formulations et des symbolisations. A partir de ces interrogations, je suis arrivé à l’idée qu’un concept est un triplet de trois ensembles **: S, I, L**

**S l’ensemble des situations qui donnent du sens au concept**
**I l’ensemble des invariants opératoires sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes**
**L l’ensemble des formes langagières et symboliques qui permettent de représenter concepts, situations et formes de traitement**

Il est bien connu que, des deux grandes références que sont Piaget et Vygotski, le premier mettait l’action en avant, et s’intéressait au langage de manière marginale, tandis que le second s’intéressait plutôt au langage et relativement peu à l’action. Bien que je m’intéresse plutôt à l’action, je viendrai à la question du langage et des représentations symboliques dans la deuxième partie de mon exposé, en même temps que j’aborderai la question des rapports signifiants/signifiés. La connaissance est activité en situation, mais elle est aussi faite d’énoncés et de textes.

Une autre remarque me paraît utile pour que vous compreniez l’évolution du psychologue vers la didactique ; Piaget a cherché à identifier les structures logiques susceptibles de caractériser les grandes étapes du développement cognitif de l’enfant. Il a ainsi abouti aux structures de groupement et de groupe, censées caractériser le stade des opérations concrètes et celui des opérations formelles. J’ai ressenti le besoin de prendre à bras le corps les questions spécifiques de conceptualisation en arithmétique, en géométrie, en algèbre ; et de prendre mes distances avec le réductionnisme logique, qui m’apparaissait une voie sans issue. La théorie des champs conceptuels est née de ce besoin. Elle est donc le fruit de mes recherches en didactique et de ma collaboration avec les mathématiciens : plus de 30 ans, ce n’est pas rien ! Entendons-nous bien : les recherches sur des contenus conceptuels spécifiques existent bien chez Piaget, comme en témoignent ses travaux sur l’espace, sur les quantités discrètes et continues, sur les rapports entre les concepts de vitesse et de temps. Mais il existe dans son travail des interprétations discutables, pour la proportionnalité par exemple, interprétée par Piaget comme une structure logique, celles du groupe INRC, sans référence à la linéarité. J’avais besoin d’un cadre théorique différent de la logique, et qui permette de regarder la conceptualisation d’un point de vue développemental. D’où la définition :

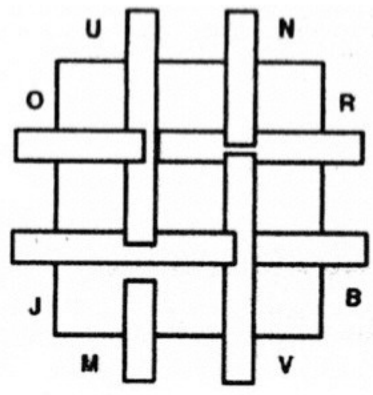
**Un champ conceptuel est constitué à la fois**
**- d’un ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion.**
**- et de l’ensemble des concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations.**

## Les barres encastrées

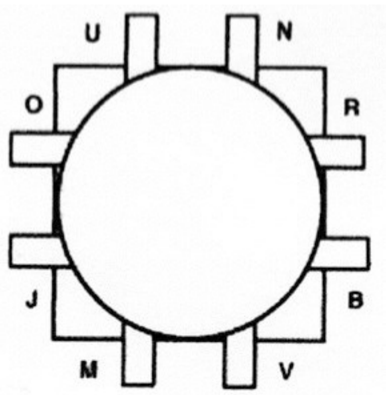
Cette recherche, que j’ai conduite au moment de la préparation de ma thèse, avait pour premier objectif de montrer que l’activité de l’enfant est organisée par autre chose que la seule réaction aux stimuli de l’environnement, comme tendaient à le prétendre les behavioristes. Elle a eu aussi l’intérêt de montrer certains phénomènes concernant la prise d’information et son interprétation dans le développement des compétences des enfants : notamment le poids des invariants opératoires dans la sélection et l’utilisation de l’information pertinente.

Les dispositifs que j’avais fabriqués pourraient trouver leur place dans un musée des arts primitifs de la psychologie. Celui qui est dessiné ci-dessous, un dispositif en bois et en carton, sent son amateur. Comme j’ai utilisé ce dispositif avec mes enfants et leurs camarades de classe, ma fille avait été interrogée par sa maîtresse : « qu'est-ce qu'il fait ton papa ? » et ma fille avait répondu « il est psychologue » « et c'est quoi psychologue ? » avait demandé la maitresse ; et ma fille avait répondu : « c'est marchand de jouets ».

Dispositif visible




Dispositif caché




Considérons d'abord le premier dispositif, dans lequel les relations entre barres sont visibles.

Les enfants sont invités à dégager la barre rouge (R), qui est bloquée par les deux barres, verte (V) et noire (N). Tirer la noire ne pose pas de problème ; tirer la verte en pose, parce qu'elle elle-même bloquée par la barre jaune (J). Celle-ci est à son tour bloquée par la barre violette (U), elle-même bloquée par la barre orange (O). Il existe aussi deux barres, bleue (B) et marron (M), qui ne bloquent rien, et qui sont là justement pour tester si les enfants vont faire la différence entre la présence et l'absence d'une relation d'encastrement.

J'ai expérimenté avec des enfants à partir de 4 ans jusque vers 6 ou 7 ans avec le dispositif dans lequel les relations entre barres sont visibles, et avec des enfants plus âgés avec le dispositif de droite où les relations sont cachées ; mais je n'en parlerai guère aujourd'hui. Je vais présenter quelques formes d'organisation de l'activité observées chez les enfants lorsque le dispositif est entièrement visible:

**1.** Essayer de tirer rouge, puis d'autres barres, un peu au hasard. Le hasard a évidemment bon dos puisque c'est probablement la difficulté pour le chercheur d'interpréter le choix de l'enfant qui conduit à parler de hasard.

**2.** Essayer de tirer rouge, tirer noir, puis essayer de tirer rouge, puis vert, puis rouge, puis vert, puis rouge à nouveau … en vain évidemment. On peut interpréter cette manière de faire comme la perception par l'enfant de la relation de connexité entre les deux barres verte et rouge, sans que soit aperçu son caractère antisymétrique, à savoir que la barre verte est encastrée dans la barre rouge, mais que la rouge n'est pas encastrée dans la verte.

**3.** Essayer de tirer rouge, puis vert, puis jaune, puis violet, puis orange, et recommencer à partir de rouge, ou d'une autre barre. Ce schème est en fait un premier algorithme, qui repose sur la perception du caractère antisymétrique de la relation d'encastrement. Cela permet de sortir du cercle vicieux du schème précédent, en remontant de la barre bloquée à la barre qui bloque.

**4.** L'algorithme le plus économique consiste évidemment à raisonner par transitivité, à examiner le dispositif avant d'agir, et à tirer directement la barre orange, puis à redescendre de la barre qui bloque à la barre bloquée. J'attire l'attention cependant sur le fait que ce n'est pas la relation d'encastrement qui est transitive, mais la règle d'action : *pour tirer X il faut tirer Y, pour tirer Y il faut tirer Z, donc pour tirer X il faut tirer Z.* Cet algorithme n'est pas observé chez les enfants avant l'âge de 6 ans, et souvent sensiblement plus tard, alors que l'algorithme 3, qui repose sur la seule antisymétrie, est observé chez certains enfants à partir de 4 ans et demi.

**5.** Un dernier schème mérite commentaire. Essayer de tirer rouge puis bleu, puis vert, puis marron, puis jaune, puis orange (qui sort). Ce schème repose sur l'organisation spatiale des barres autour du dispositif. Comme les barres sont en nombre fini, il est possible ainsi de venir à bout du problème, après un nombre suffisant de tours.

Or aucun enfant n'a réussi de cette manière. Cela me conduit à dire que la définition des algorithmes par « *leur aboutissement en un nombre fini de pas, soit à une solution s'il en existe une, soit à la démonstration qu'il n'existe pas de solution* », est une définition insuffisante du point de vue de la conceptualisation. Dans l'apprentissage des mathématiques, il faut considérer le caractère nécessaire des relations. Les mathématiques savantes s'intéressent surtout au nécessaire abstrait, celui qui relie par exemple des théorèmes à des axiomes et à des définitions. Ici on a affaire à du nécessaire concret, c'est-à-dire à des relations matérielles qui permettent, si on est en mesure de prendre l'information pertinente, de conduire son activité de manière rationnelle.

Lorsque j'ai appris à programmer en Angleterre il y a 40 ans, on parlait de l'algorithme du British Museum, justement pour souligner, par métaphore, que lorsqu'on a un nombre fini de cas, comme dans un catalogue, celui du British Muséum par exemple, y compris lorsque ce nombre est très grand, on peut aboutir à une solution en passant en revue tous les cas du catalogue. Certes, mais ce n'est pas le moyen de comprendre le développement de la rationalité.

Si je résume les représentations sous-jacentes à ces différentes organisations de l'activité, je trouve *la boîte noire* dans le premier cas, et d'ailleurs quand on demande aux enfants de dessiner le dispositif qu'ils voient, certains se contentent de dessiner l'ensemble des barres, soit autour du dispositif, soit les unes à côté des autres. Je trouve ensuite *la connexité* seule sans antisymétrie, puis *l'antisymétrie*, puis *la transitivité*. Cela est encourageant pour qui cherche la relation entre la conceptualisation et l'activité, et pour qui le développement est un objet essentiel de la recherche en psychologie. Les enfants sont évidemment incapables de formuler ces propriétés, mais ils ne les utilisent pas moins dans leur activité ; ce sont des invariants opératoires, c'est-à-dire des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte. La relation d'encastrement est elle-même un concept ; elle n'est pas saisie d'emblée avec toutes ses propriétés.

L'antisymétrie et la transitivité sont de l'ordre du mathématique. Comme je ne suis pas avare de métaphores, je voudrais ajouter que, avec le dispositif caché, on a une sorte d'illustration des rapports entre physique et mathématique. Les enfants doivent en effet faire des hypothèses sur les relations cachées, à partir des essais qu'ils font sur les barres, et se construire ainsi un modèle calculable. Inutile de préciser que cela est une vraie gageure, et que peu d'entre eux parviennent à quelque chose de raisonnablement effectif. On a cette fois affaire à une vraie boîte noire et, même si on ouvre une petite fenêtre permettant d'explorer les unes après les autres les différentes relations, en tournant l'écran ajouré sur le dispositif, les réussites sont rares. Comme dans le mythe de la caverne de Platon, le réel ne fournit qu'une partie des observables qui seraient nécessaires à la rationalité. Il faut donc en construire un modèle calculable, mathématique le plus souvent. Les mathématiques sont constitutives de la physique, mais la physique n'est pas pour autant réductible aux mathématiques : l'une des raisons est justement le caractère peu accessible, même par hypothèse, par métaphore et par glissement de sens, de l'information non observable.

Cette idée d'accès à l'information est essentielle. Je vais donc l'exploiter en proposant une classification des situations susceptible de nous aider à mieux comprendre le développement de la rationalité.

On peut distinguer trois grandes classes de situations : situations nécessaires, situations régulières et situations aléatoires. Dans les situations nécessaires, on a un accès suffisant à l'information pertinente et aux raisons et processus sous-jacents pour organiser son activité de manière rationnelle : c'est le cas du dispositif ci-dessus lorsque les relations d'encastrement sont totalement visibles. Dans les situations régulières, les régularités observables sont engendrées par des processus auxquels on n'a pas totalement accès. Ces régularités permettent des prédictions sur les événements singuliers, mais on n'a pas un accès suffisant aux processus pour prévoir à coup sûr. Dans les situations aléatoires, il n'y a même pas de régularité dans les événements singuliers, et on en est réduit, dans le meilleur des cas, à des prédictions sur des classes d'événements.

Pierre Gréco, avec qui j'ai beaucoup discuté et débattu au début de ma carrière, et dont j'ai beaucoup appris, distinguait entre « nécessaire, régulier, déterminé et aléatoire » ; j'ai critiqué et supprimé la catégorie du « déterminé », que je trouvais redondante par rapport à celle du régulier, et j'ai ajouté un deuxième critère de classification, qui peut être croisé avec le premier : la distinction entre situations productives, situations passives et situations interactives. Dans les situations productives, les événements ne dépendent que de l'action propre du sujet, alors que, dans les situations passives, ils n'en dépendent pas du tout. Evidemment les situations auxquelles on a affaire dans la vie sont le plus souvent interactives : les événements dépendent à la fois de l'action propre et de processus sur lesquels on n'a pas de prise directe.

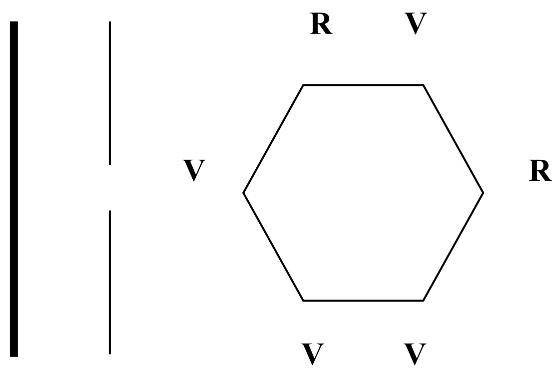
Au cours de son développement, l'enfant progresse en rationalité et en pouvoir sur le réel ; il le fait d'abord à travers les situations productives et nécessaires, qui sont de l'ordre du mathématique comme je l'ai avancé plus haut. L'extension de la rationalité aux situations régulières et aléatoires demande l'élaboration d'instruments conceptuels supplémentaires : des représentations calculables, comme les modèles géométriques, ou les probabilités. Evidemment cette position épistémologique peut être contredite, à commencer par le fait que, dans l'histoire des sciences, l'astronomie a connu une certaine avance sur les autres sciences, alors que c'est typiquement à des situations régulières et passives, que les astronomes avaient affaire : ils n'avaient aucun pouvoir sur les astres. Il n'en est pas moins intéressant de regarder les apprentissages et l'expérience des enfants à travers le prisme de la classification que je viens de présenter. Le poids du productif notamment est important dans la construction de la rationalité, parce que les sujets sont actifs et qu'ils accordent un certain privilège aux effets que produit leur action propre, même si cette action se place dans des processus d'interaction avec la nature : j'en prends pour témoignage le fait que Darwin, pour rendre intelligible l'évolution des espèces, qui relève typiquement de processus aléatoires interactifs, explique dans son ouvrage que les deux idées qui sont au centre de sa théorie, l'idée de variation et celle de sélection, lui ont été inspirées non par ses observations aux Galapagos, mais par les pratiques des éleveurs et des agriculteurs, particulièrement des jardiniers. Si ces pratiques, que Darwin avait étudiées et expérimentées lui-même, n'avaient pas fait partie de sa culture, il n'aurait peut-être pas pu faire le saut scientifique qui continue à agiter les esprits deux siècles plus tard.

Pour illustrer mon raisonnement je vais faire appel à des situations permettant d'illustrer la distinction entre nécessaire, régulier et aléatoire.

Dans un premier cas deux lampes, l'une verte, l'autre rouge, s'allument de manière aléatoire, avec comme seule contrainte que la lampe verte s'allume deux fois plus souvent que la rouge. Les expérimentations des psychologues montrent que la plupart des sujets, adultes comme enfants, ajustent progressivement leurs prédictions à la loi de probabilité *deux fois vert pour une fois rouge*, alors que la rationalité commanderait de prévoir toujours vert, pour maximiser les gains.

Dans un second cas, on peut observer une régularité qui permet de faire des prédictions sur les événements singuliers : par exemple la séquence régulière RVVRVVRVV…ou la séquence plus complexe RVRVVVRVRVVVRV…

Dans un troisième cas, cette dernière séquence est engendrée par la rotation d'un ensemble de 6 lampes, positionnées sur un cercle ou un hexagone, de telle sorte que chacune projette sur un écran soit une lueur rouge soit une lueur verte, avec la même régularité que dans la dernière suite RVRVVVRVRVVVRV…




On n'est pas très éloigné de la situation de la caverne de Platon. Il est clair que la dernière situation est une situation nécessaire pour l'observateur qui peut voir la rotation de l'hexagone, et une situation seulement régulière pour l'observateur qui ne voit que la lueur projetée sur le mur.

A partir de là je voudrais formuler trois principes d'incertitude :

Le premier concerne les situations aléatoires : on est incertain parce qu'on ne peut pas prévoir les événements singuliers ;

Le second concerne aussi les situations régulières : on est incertain parce qu'on n'a pas accès à toute l'information qui serait nécessaire ;

Le troisième principe concerne aussi et en premier lieu les situations nécessaires : on est incertain parce qu'on ne dispose pas des catégories de pensées, explicites ou implicites, qui permettraient de saisir et de traiter toute l'information pertinente, même lorsqu'elle est directement accessible.

Ce dernier principe exprime directement l'importance de la conceptualisation, et donc des invariants opératoires, dans le jeu contre l'incertitude. On le voit bien dans la manière dont les enfants traitent le dispositif des barres encastrées, lorsque le dispositif est visible ; mais les invariants opératoires, sont évidemment nécessaires aussi pour l'élaboration et la compréhension des représentations calculables concernant les situations régulières et aléatoires. En d'autres termes, le troisième principe d'incertitude concerne toutes les situations, les processus inobservables comme les processus observables.

On pourrait ajouter un dernier principe d'incertitude, transversal par rapport aux trois premiers : on est incertain parce qu'on ne peut pas modifier le cours des choses. Mais ce dernier principe tient justement au fait qu'on ne dispose pas des ressources conceptuelles pour appréhender les situations nécessaires, régulières et aléatoires. L'approche développementale de la conceptualisation est essentielle pour comprendre la victoire progressive des enfants sur l'incertitude.

## Les structures additives

L'espace est un domaine privilégié des mathématiques, mais il n'épuise évidemment pas le problème de la conceptualisation du réel pour la période de l'enfance, et notamment la compréhension des quantités et des grandeurs, et de leurs relations. L'exemple du dénombrement me vient souvent à l'esprit, à la fois parce que c'est une compétence première dans le processus de construction du nombre, et aussi, raison théorique, parce que c'est un exemple concret de la relation entre conceptualisation et organisation du geste. Le premier domaine de pertinence du concept de schème est en effet le domaine des gestes. Simulons ce que fait une enfant de quatre ou cinq ans lorsqu'il compte les personnes de la première rangée : un, deux, trois, quatre…QUATRE !

Cette organisation de l'activité repose sur deux idées mathématiques essentielles:

la correspondance biunivoque : entre les personnes dénombrées, les gestes du doigt et de la main, les gestes du regard, et les gestes de la voix ;

Le cardinal : qui se traduit, dans l'imitation que je viens de faire, par la répétition du dernier mot-nombre : d'abord associé au dernier élément dénombré, puis à l'ensemble tout entier.

On sait que de nombreux enfants ont du mal à assurer la correspondance biunivoque, faute de coordonner correctement les trois registres : geste du pointage avec le doigt, regard, énonciation. Ils vont trop vite dans un des registres ou pas assez vite. Ce principe de biunivocité se traduit par la règle qu'il faut compter tous les objets (exhaustivité), et ne pas compter deux fois le même (exclusivité).

Le cardinal se prête à l'addition ; ce n'est pas le cas du nombre ordinal (ou numéro) associé au dernier élément de la collection. Tant il est vrai que, sans le concept de cardinal, il n'y a pas de nombre : l'addition est une propriété caractéristique du nombre par rapport aux relations d'ordre et d'équivalence. Une collègue américaine, Karen Fuson a observé des enfants qui, en réponse à la question « combien ? » pouvaient recommencer à compter les objets jusqu'à 7 ou 8 fois, incapables qu'ils étaient de résumer l'information par le cardinal de l'ensemble des objets.

Lorsque je suivais le séminaire de Guilbaud, au début de ma carrière, il avait expliqué notamment les trois axiomes de la théorie de la mesure :
Toute mesure est positive ou nulle
Il existe un objet de mesure nulle
On peut identifier une opération sur les objets qui autorise l'addition des mesures.

Ce sont justement ces axiomes qui s'appliquent au concept de cardinal, lequel est ainsi le premier exemple de mesure. Evidemment ces axiomes ne peuvent être que des axiomes en acte chez l'enfant, et les deux premiers n'ont probablement pas beaucoup de sens pour eux. En revanche l'axiome d'additivité permet de différencier les compétences des élèves.

*Card (A union B) = Card (A) + Card (B)*

Par exemple un enfant de quatre ans qui compterait les personnes du salon, puis celles du jardin, et qui, à la question « combien ça fait en tout », recompterait le tout, ne saurait être crédité de ce théorème-en-acte :

La restriction « *pourvu que A et B n'aient pas de partie commune* » relève, quant à elle, du principe de biunivocité.

Patrick Suppes, un mathématicien américain qui était très actif il y a une quarantaine d'années, avait formulé ce qu'il appelait un « problème de représentation ». Son but était alors de clarifier les conditions dans lesquelles les psychologues pouvaient se permettre certaines opérations arithmétiques (somme et moyenne par exemple) sur les données obtenues en psychométrie. Il avait formulé ce problème de représentation de la manière suivante :

**« Comment caractériser les propriétés formelles des objets et des opérations qu'on peut leur appliquer, qui soient isomorphes à des opérations numériques adéquatement choisies. »**

Cette formulation permet d'établir la relation avec les différents types d'échelle et les axiomes de la théorie de la mesure ; et de faire ainsi la critique des opérations et interprétations de certains psychométriciens : beaucoup d'entre eux, à l'époque de Suppes, faisaient des sommes et des moyennes sur des données qui ne pouvaient nullement supporter de telles opérations.

La formulation de Suppes permet aussi de critiquer les prétendues découvertes des psychologues du bébé qui, pour certains d'entre eux, prêtent au bébé des compétences numériques dès ses premiers mois d'existence. Ils ne font alors aucun usage de l'exigence posée par Suppes : dans ce cas la surinterprétation des chercheurs consiste à gommer le fait que, lorsqu'ils sont surpris par un nouveau tableau et se mettent à téter plus rapidement ou au contraire à s'arrêter, les bébés peuvent réagir à une différence ou une ressemblance avec ce qui a précédé, dans le meilleur des cas à une comparaison ordinale, en aucun cas à une opération proprement numérique. Entre l'équivalence et l'ordre comme premières conceptualisations des bébés dans l'exploration du réel, et l'échelle absolue que représentent le cardinal et l'axiome d'additivité, il y a une différence considérable. Dans le tableau des échelles présenté par Suppes, l'écart est occupé par les échelles d'intervalle, dans lesquelles il n'y a ni un zéro qui s'imposerait, ni une unité privilégiée (c'est le cas des températures), et par les échelles de rapport, dans lesquelles il y a bien un zéro naturel mais pas d'unité privilégiée (c'est le cas des mesures spatiales notamment). Evidemment les enfants de 4 à 6 ans ne sont pas concernés par ces constructions. Ils le sont par contre par l'échelle absolue que représente le cardinal. Une échelle d'ordre, ça n'est pas une échelle absolue, et il est un peu étonnant que certains collègues français, y compris certains académiciens, aient pris au sérieux cette thèse des compétences numériques précoces des bébés sans se poser la question de l'addition. Piaget ne serait jamais tombé dans cette erreur d'appréciation, même s'il n'a pas donné toute sa place au critère de l'addition, préoccupé qu'il était par la question des conservations, certes une bonne question, mais insuffisante à elle seule !

La formalisation mathématique de certaines compétences des bébés et des enfants peut ainsi contribuer à clarifier les discussions. C'est un argument pour la formalisation, en termes de théorèmes-en-acte, des conquêtes cognitives des enfants.

Sans l'addition il n'y a pas de nombre. La question subséquente est alors : comment cela commence-t-il ? Si l'additivité est une propriété constitutive du concept de nombre, qu'en est-il pour les jeunes enfants, entre 4 et 6 ans par exemple ?

On peut résumer les choses en disant qu'il existe pour eux deux prototypes de l'addition, en entendant par « prototypes » les premières situations par lesquelles les enfants donnent du sens à l'addition :
La réunion de deux parties en un tout : on peut la formaliser par une loi de combinaison binaire ;

L'augmentation d'une quantité initiale : elle est mieux formalisée par une opération unaire, une fonction qui transforme un état initial en un état final.

On peut montrer certaines équivalences entre les deux prototypes, mais il existe aussi des différences conceptuelles importantes entre eux, notamment parce que les parties et le tout sont représentables par des nombres positifs (ce sont des mesures), tandis que les transformations peuvent être des augmentations ou des diminutions, et appellent donc des nombres relatifs. En outre, alors que la relation partie-partie-tout offre la possibilité de deux classes de situations (rechercher le tout connaissant les deux parties et rechercher une partie connaissant le tout et l'autre partie), la relation état initial-transformation-état final offre la possibilité de six classes de situations (rechercher l'un des trois termes connaissant les deux autres, et cela dans les deux cas où la transformation est une augmentation ou une diminution). J'ajoute que la recherche de l'état initial demande un théorème-en-acte non trivial pour la plupart des enfants jusqu'au CE2 : l'inversion de la transformation directe et l'application de la transformation réciproque à l'état final. Cette opération de pensée est si difficile que certains enfants se tirent d'affaire, ou espèrent se tirer d'affaire, par un moyen plus long et plus coûteux ; faire une hypothèse sur l'état initial, lui appliquer la transformation directe, trouver un état final (le plus souvent erroné), et corriger l'hypothèse sur l'état initial.

J'ajoute encore que parmi les six classes de situations dont je viens de parler deux seulement font appel à une addition, les quatre autres à une soustraction, ce qui contredit l'idée communément admise que la soustraction et l'addition sont des opérations inverses l'une de l'autre. Elles le sont certes, mais pour certains cas de figure seulement, dans le cas du deuxième prototype : un gain de n billes annule une perte de n, comme une perte de n annule un gain de n ; la transformation qui fait passer de l'état final à l'état initial est l'inverse de la transformation qui fait passer de l'état initial à l'état final.

Ces distinctions semblent peu importantes pour des adultes mathématiciens, mais elles conduisent en fait à considérer une grande variété de situations non prototypiques, qui vont alimenter le long terme de l'apprentissage des structures additives. Pour commencer, alors qu'on pourrait imaginer qu'il existerait deux situations prototypiques de la soustraction (comme pour l'addition) il n'en existe qu'une : la diminution d'une quantité initiale. La recherche d'une partie connaissant le tout et l'autre partie demande une opération de pensée supplémentaire.

On sait par les travaux des historiens des mathématiques que les nombres négatifs n'ont pas été considérés comme des nombres par de nombreux mathématiciens jusqu'au 19ème siècle. On sait aussi qu'ils ont été élaborés à partir de problèmes de calcul algébrique, qui sont hors de la portée des élèves de l'école élémentaire ; or, on dispose, avec les transformations, d'un moyen relativement naturel de leur donner du sens ; sans sous-estimer pour autant les difficultés durables que peuvent rencontrer les élèves dans certaines situations. Je vais en donner un exemple plus loin avec la décomposition d'une transformation connue en deux transformations, dont l'une est connue et l'autre inconnue.

En tous cas l'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques ne peut pas être identifiée purement et simplement à l'épistémologie des mathématiques, pour cette raison simple que les questions que se posent les enfants, même avec l'aide de l'adulte, ne sont pas les mêmes que celles que se posent les mathématiciens. Je donne ici au terme « épistémologie » un sens restreint, celui de la relation entre la connaissance et les problèmes, pratiques ou théoriques, auxquels elle apporte une réponse.

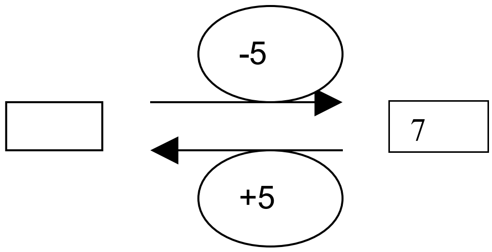
La résolution de problèmes d'arithmétique suppose des calculs relationnels, et pas seulement des calculs numériques, et c'est souvent sur les difficultés de ces relations qu'achoppent les enfants. Regardons ensemble les trois problèmes suivants, de niveau différent bien que demandant la même opération numérique, l'addition 7 + 5 :

*Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?*
*Robert vient de perdre 5 billes; Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?*
*Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 7 billes. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?*

Le problème Pierre est résolu par la quasi totalité des enfants à la fin du cours préparatoire, tandis que le problème Robert n'est résolu qu'au CE2, parfois un peu plus tôt, souvent un peu plus tard. La difficulté vient évidemment de la nécessité d'inverser la transformation donnée dans l'énoncé (perdu des billes) et d'ajouter les billes perdues à l'état final. Cette opération de pensée repose sur un théorème-en-acte qui n'est pas donné dans l'énoncé :

En termes savants $F = T(I)$ $I = T^{-1}(F)$

En termes moins savants




Ce dernier symbolisme me permet d'ouvrir la question des représentations susceptibles d'aider les enfants. En effet alors que le problème Pierre peut être représenté par l'algèbre, par le schéma sagittal, et par les « patates » d'Euler-Venn, sans qu'aucune de ces représentations soit d'ailleurs vraiment indispensable pour résoudre le problème puisqu'il s'agit d'un cas prototypique, le problème Robert ne peut pas être représenté par des « patates » pour la raison princeps qu'il est impossible de représenter une transformation négative par une surface. En outre, si l'on se pose la question du passage de la représentation du problème à la représentation de la solution, le schéma sagittal ci-dessus est la seule représentation opératoire. En effet l'algèbre, ou ce qui en tient lieu pour les enfants de l'école élémentaire, demande, pour le passage d'une ligne à l'autre, un théorème de conservation de l'égalité et de la solution, qui n'est pas à la portée des enfants du cours préparatoire et du cours élémentaire.

$$x - 5 = 7$$
$$x = 7 + 5$$

Le fait de substituer un carré vide à la lettre x, comme on le fait souvent à l'école élémentaire ne change rien à l'affaire.

Avec le problème Thierry, la difficulté conceptuelle est gravement accrue par rapport aux problèmes Pierre et Robert, au point que l'échec est quasi total à la fin de l'école élémentaire et au début du collège. Souvent, lorsqu'on interroge les collègues sur le pourquoi de cette difficulté, ils invoquent la difficulté de l'énoncé. Je les invite alors à faire une expérience que j'ai faite à plusieurs reprises : on reprend la structure de l'énoncé Thierry et l'on se donne plusieurs cas de figure pour les énoncés concernant la seconde partie de billes et ce qui advient en tout ;

*Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a ………………*
*En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a……………*
*Que s'est-il passé à la première partie ?*

On substitue aux pointillés les informations suivantes :

| Seconde Partie | | En Tout | |
|---|---|---|---|
| Gagné | 7 | gagné | 15 |
| Perdu | 7 | perdu | 15 |
| Gagné | 15 | gagné | 7 |
| Perdu | 7 | gagné | 15 |
| Gagné | 15 | perdu | 7 |

Les enfants trouvent alors sans difficulté excessive la réponse dans les deux premiers cas. Par glissement de sens, ils se rabattent sur l'interprétation partie-partie-tout : les deux transformations sont de même signe, le tout est plus grand que la partie.

Dans le troisième cas il y a déjà un petit obstacle parce que le tout est plus petit que la partie, mais un autre glissement de sens intervient éventuellement : gagné 15 est interprété comme un état initial, gagné 7 comme un état final ; Thierry a donc perdu des billes ; il en a perdu la différence.

Dans les deux derniers cas, il est impossible de se ramener à un modèle parte-partie-tout ou à un modèle état initial-état final parce que les deux transformations sont de signe contraire. Les élèves échouent massivement. Ce serait une occasion d'introduire certains aspects du calcul dans les relatifs; à ma connaissance cela n'a été entrepris dans aucune expérimentation didactique.

A ce point de mon exposé, je peux soutenir que l'expression « champ conceptuel » n'est pas usurpée pour les structures additives : il relie l'arithmétique à l'algèbre, et en même temps l'école élémentaire à l'école secondaire.

Aux trois relations additives de base que sont la relation parte-partie-tout, la relation état initial-transformation-état final, et la relation référé-comparaison-référent (*combien de plus ou de moins que*) que je n'ai pas évoquée ici, mais qui est importante dans le développement conceptuel des enfants, on peut adjoindre des relations nouvelles qui, toutes, mettent en jeu des nombres relatifs ; la composition de transformations, la composition de relations, et la transformation d'une relation.

Comme un champ conceptuel est à la fois un ensemble de situations et un ensemble de concepts, il n'est pas superflu d'énoncer maintenant les concepts qui jalonnent la compréhension de ces situations : quantité discrète, grandeur continue, mesure, partie, tout, état, transformation, comparaison, référé, référent, composition binaire (de mesures, de transformations, de relations), fonction et opération unaire, inversion, nombre naturel, nombre relatif, position, abscisse, valeur algébrique. La plupart de ces concepts ne sont pas explicites ; ils sont « en-acte ».

Un autre commentaire théorique est que la pensée est à la fois systématique et opportuniste : si elle n'était pas systématique on ne pourrait pas comprendre comment l'enfant développe progressivement des compétences rationnelles ayant une certaine généralité. Si elle n'était pas opportuniste, on ne pourrait pas comprendre comment l'enfant fait feu de tout bois pour s'adresser à une situation jamais rencontrée auparavant.

On mesure aussi que, dans cette adaptation aux situations nouvelles, les formes d'organisation de l'activité, les schèmes, jouent un rôle central. Quel que soit le poids des représentations symboliques et du langage, la forme opératoire de la connaissance, celle qui permet d'agir en situation, est une expression essentielle de la connaissance. Même pour les mathématiques, qui forment un édifice impressionnant de textes et d'énoncés, il faut conserver à l'esprit que les mathématiques sont nées du besoin des hommes d'être opératoires.

## Compétences et schèmes

La double expression de la connaissance, par l'action et par les énoncés, mérite un détour théorique. Cela ne concerne pas que les mathématiques, ni même les mathématiques d'abord. Aussi bien est-ce en travaillant avec des collègues des entreprises que j'ai été conduit à préciser ce qu'il fallait entendre par « compétence ». Voici quelques définitions, nullement exclusives les unes des autres, mais au contraire complémentaires. Ces essais de définition sont formulés dans les termes d'une relation d'ordre, justement parce que la compétence se prête presque toujours, dans les esprits, à un jugement de valeur relative. On peut adopter une perspective développementale (comparaison au cours du temps) ou une perspective différentielle (comparaison entre individus), comme c'est le cas dans la définition 1 ci-dessous.

1 **A est plus compétent au temps t' qu'au temps t s'il sait faire ce qu'il ne savait pas faire**

**A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire**

2 **A est plus compétent s'il s'y prend d'une meilleure manière**

3 **A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives**

4 **A est plus compétent s'il est moins démuni devant une situation nouvelle**

Chacune de ces idées mérite commentaire :

La définition 1 est très proche de l'idée de performance, alors que, justement, le mouvement d'idées actuel vise à les différencier. Rien n'est dit en effet sur l'organisation de l'activité.

La définition 2 précise qu'il s'agit d'une « meilleure manière ». Il faut donc des critères, comme la rapidité, l'économie de moyens, la fiabilité, la sécurité, la compatibilité avec l'activité des autres.

La définition 3 surprend parfois les ingénieurs, pour lesquels on peut et doit s'en tenir à la meilleure manière. Or l'expertise d'un ingénieur, comme d'ailleurs d'un autre professionnel dans son domaine, consiste justement à disposer de plusieurs ressources, plus ou moins pertinentes selon le cas de figure rencontré. A titre d'exemple simple en mathématiques, je peux citer le cas de la recherche d'une quatrième proportionnelle, pour laquelle il existe plusieurs « bons raisonnements », dont la pertinence relative dépend des valeurs numériques. Il est d'ailleurs profitable qu'un enseignant encourage ses élèves à raisonner de plusieurs manières. En outre les élèves utilisent parfois des procédures erronées qui font partie du tableau, justement parce que les erreurs ne sont pas toutes aussi aberrantes les unes que les autres, et que certaines d'entre elles représentent un début de compréhension.

Enfin la définition 4 est très importante dans le monde du travail aujourd'hui, en raison du fait que les hommes et les femmes héritent en général des problèmes à résoudre de manière impromptue, pour lesquels il n'existe pas encore de solution toute faite.

Ce détour par le concept de compétence ne doit pas faire illusion. Ce n'est pas à mes yeux à soi seul un concept scientifique : il a le mérite de mettre l'accent sur la forme opératoire de la connaissance mais il n'est pas assez analytique pour que les chercheurs puissent, avec ce seul concept, décrire et analyser l'activité. C'est le concept de schème qui permet de faire le pas qui manque, justement parce qu'il permet de suivre pas à pas le déroulement de l'activité, et d'analyser ce déroulement dans ses différents aspects, comme la définition 3 ci-dessous nous y engage.

**1 Un schème est une totalité dynamique fonctionnelle**

**2 Un schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations**

**3 Un schème comprend nécessairement quatre catégories de composantes:**

**- un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations**

**- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle**

**- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)**

**- des possibilités d'inférence**

**4 Un schème est une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions, et ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions (n et n' très grands)**

La première définition, qui est une idée plus qu'une définition, correspond à peu près à ce que Piaget avait en tête lorsqu'il interprétait les gestes du bébé. Il ne ressentait guère le besoin d'une définition plus stricte. Au fond le schème était pour lui une sorte de bonne forme, analogue aux bonnes formes des gestaltistes pour la perception. Simplement, et cela représentait une importante idée nouvelle, c'était une forme dynamique, qui concernait l'action gestuelle en même temps que la perception.

La deuxième définition m'a été suggérée par ce que j'ai lu sur les algorithmes dans les années 60 (Trahtenbrot) : un algorithme demande à être référé à une classe de problèmes bien caractérisée.

Quant à la troisième définition, c'est la plus analytique : elle retient les quatre caractéristiques essentielles que sont la finalité, le caractère génératif du schème, son contenu épistémique, et la variabilité de l'activité associée à l'idée de classe de situations, et que permettent justement les possibilités d'inférences.

Déjà la deuxième définition, en retenant l'idée de classe de situations, permet de considérer le schème comme un universel, en ce sens que des quantificateurs universels sont nécessaires pour décrire un schème. Cela donne raison à Piaget, lorsqu'il faisait du schème un précurseur du concept. Une autre idée de la deuxième définition mérite l'attention : ce qui est invariant, c'est l'organisation de l'activité, non pas l'activité elle-même, ni la conduite observable. Le schème n'est pas un stéréotype.

Par rapport à d'autres essais de définition de l'activité en situation, je voudrais attirer l'attention sur quelques points. Concernant le caractère génératif du schème, Newell et Simon avaient il y a longtemps proposé l'idée de règle d'action, mais ils n'avaient pas relevé que la prise d'information et le contrôle sont des composantes essentielles de l'activité, qui font souvent la différence entre différents niveaux de compétence : par exemple dans le schème du dénombrement, c'est en raison de dysfonctionnements concernant les gestes du regard que certains enfants échouent à organiser la correspondance biunivoque que j'ai évoquée plus haut. On ne trouve pas cette idée non plus chez Leontiev.

Concernant la composante proprement épistémique du schème, c'est-à-dire les invariants opératoires, ils sont absents de presque toutes les approches de l'activité en situation, ce qui interdit d'opérer la liaison théorique entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance. Je reviens plus loin sur ce point. Le cas le plus patent est celui des réseaux sémantiques, invoqués aujourd'hui dans de nombreuses recherches, et qui, fondés sur un fonctionnement cognitif purement associatif, font l'impasse sur les processus différenciés de conceptualisation, notamment la distinction entre concept et théorème. Or cette distinction est essentielle pour comprendre qu'un même concept peut se décliner à plusieurs niveaux de puissance et d'efficacité en fonction des théorèmes qui l'accompagnent. On l'a vu pour les structures additives, mais un autre exemple permet de bien voir la différence entre un concept-en-acte et un théorème-en-acte. Dans une recherche que j'ai rapportée de nombreuses fois, des élèves de quatrième, après avoir réuni des informations nombreuses sur une ferme de la Beauce, et formulé certaines des questions qu'on était susceptible de se poser à partir de ces informations, se trouvent confrontés au calcul de la quantité de farine produite à partir de la récolte de la ferme : 972 000kg de blé ; et il faut 120 kg de blé pour faire 100 kg de farine. Pendant un quart d'heure, le groupe de quatre élèves que j'observais ne parvient pas à trouver le moyen de conduire le calcul. La sonnette de l'interclasse retentit. La semaine suivante les mêmes élèves achoppent à nouveau pendant une vingtaine de minutes sur la même question, jusqu'à ce que l'une d'elles (c'était un groupe de quatre filles) propose de diviser 972 000 par 120. Elle ne parvient pas à expliquer la raison de cette suggestion à ses compagnes. Mais celles-ci adoptent sa proposition, sentant confusément que ce rapport entre deux quantités de blé doit pouvoir être transposé du côté des poids de farine correspondants. Et de fait, elles parviennent à l'idée qu'on peut multiplier 100 kg de farine par ce rapport.

Ainsi, le rapport scalaire (sans dimension) entre deux quantités de même nature, est un concept-en-acte tenu pour pertinent avant même que le théorème-en-acte d'isomorphisme qui va permettre de traiter la situation soit lui-même explicitable : $f(k120) = kf(120)$.

Un théorème est une proposition, et un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie dans l'action. Un concept-en-acte n'est pas susceptible de vérité ou de fausseté, mais seulement de pertinence ou de non pertinence. Parmi les concepts-en-acte, on peut identifier des objets et des prédicats à une ou plusieurs places, mais ni les uns ni les autres ne sont des propositions. Un prédicat est une fonction propositionnelle, pas une proposition. Les relations entre théorème, objet et prédicat ont été beaucoup clarifiées par les travaux de Frege et Russell sur les propositions, les arguments et les fonctions propositionnelles.

Concernant les situations de proportionnalité entre grandeurs, je rappelle ci-dessous quelques-uns des théorèmes-en-acte qui ont été mis en évidence dans les raisonnements des élèves à la fin de l'école élémentaire et au collège.

les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire

$$f(x+x')=f(x)+f(x')$$

$$f(ax)=af(x)$$

$$f(ax+a'x')=af(x)+a'f(x')$$

le coefficient de proportionnalité

$$f(x)=kx$$

$$x=f(x)/k$$

le produit en croix et la règle de trois

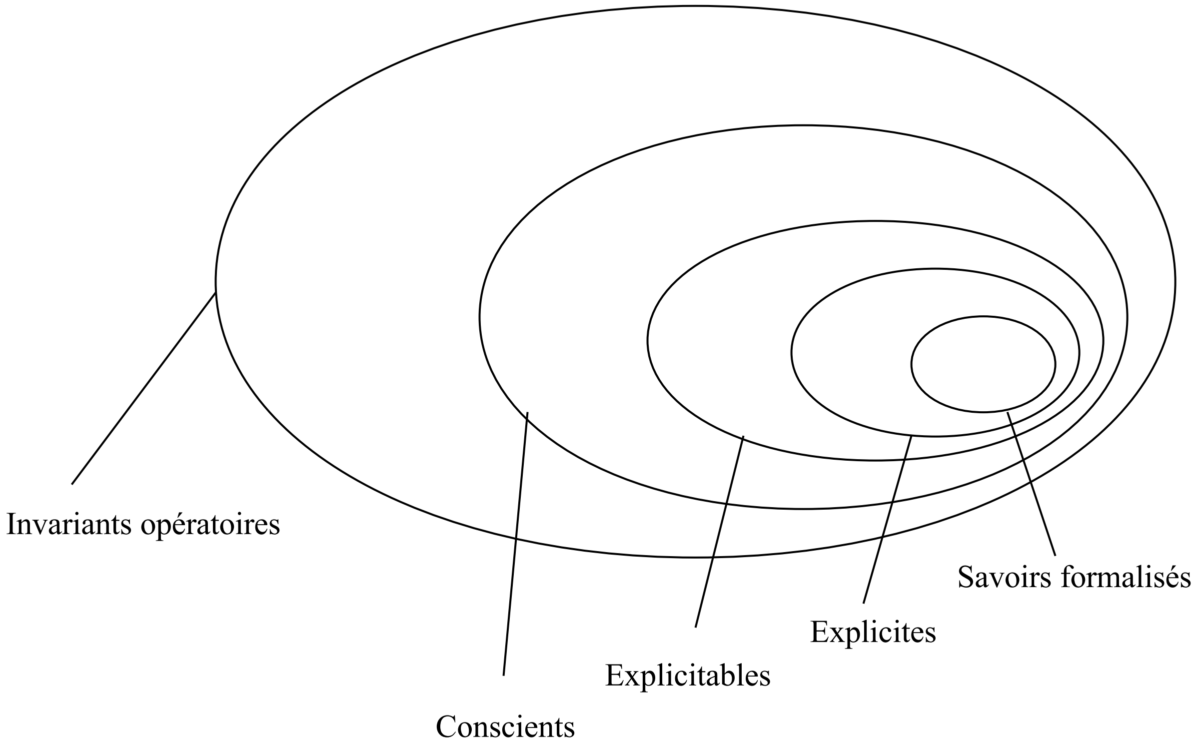
$$x'\times f(x)=x\times f(x')$$

$$f(x') = x' \times f(x)/x$$

la double linéarité

$$f(n_1 x_1, n_2 x_2) = n_1 n_2 f(x_1, x_2)$$

C'est intentionnellement que les théorèmes ci-dessus sont formulés dans un langage relativement formalisé : la raison en est qu'il existe un rapport plus étroit qu'il ne peut y paraître entre les mathématiques savantes et les mathématiques contenues dans l'activité arithmétique ordinaire. Mon idée est qu'il y a une « quasi continuité » entre les invariants opératoires, fussent-ils faiblement conscients voire inconscients, et les connaissances formalisées du mathématicien. « quasi continuité » parce qu'il y a évidemment des changements qualitatifs, et même des ruptures, à plusieurs reprises dans le mouvement qui va de la conceptualisation dans l'action aux formes prédicatives élaborées de la connaissance.




Le schéma ci-dessus exprime les parentés et les filiations possibles entre invariants opératoires et savoirs formalisés. Même si le mouvement se fait plutôt du plus grand « cercle » vers le plus petit, le mouvement peut se faire aussi dans l'autre sens,. En effet un savoir formalisé ou explicite n'est pas nécessairement opératoire d'emblée : cela demande la confrontation avec des situations idoines, et certaines formes de prise de conscience.

Autres remarques : il ne faut pas identifier purement et simplement conscience et explicitation : d'une part il existe des formes conscientes d'identification des objets du réel et de leurs propriétés qui ne sont pas pour autant explicites, comme dans la perception et le geste par exemple ; d'autre part les hommes (et les chercheurs en particulier) ont développé des techniques spéciales (entretiens d'explicitation, d'auto-confrontation) pour amener les sujets à expliciter leur pensée et leur activité en situation. Il faut ainsi distinguer ente explicite et explicitable (l'explicitable n'est explicite que dans certaines conditions et en cas de besoin). Enfin un processus impressionnant, au cours de l'apprentissage consiste à remiser dans l'inconscient certaines connaissances et formes d'organisation de l'activité qui avaient donné lieu d'abord à des traitements conscients.

Il existe donc des conceptualisations inconscientes, et pas seulement dans les domaines qui relèvent de la psychanalyse. En physique ou en biologie aussi la métaphore est un moyen de faire émerger l'inconscient dans la conscience. Il y a pléthore de processus métaphoriques dans les processus de conceptualisation, comme Bachelard a su le montrer mieux que quiconque.

Les parentés et filiations dont je viens de parler ne signifient pas que les conflits n'existent pas entre invariants opératoires et connaissances formalisées. En voici un exemple, que j'emprunte à la thèse de Jorge Rocha de Falcao .

Une classe de seconde est invitée à mettre en équation et à résoudre par l'algèbre une situation dans laquelle des étudiants sont employés par une agence de voyage pour vendre des billets d'avion. Ils sont rémunérés sur la base du nombre d'heures travaillées et du nombre de billets vendus, à quoi s'ajoute une partie fixe. De telle sorte que la formule de leur salaire mensuel serait normalement la suivante :

$$S = Hh + Bb + c$$

S salaire,
H nombre d'heures travaillées, h prime horaire,
B nombre de billets vendus, b prime par billet,
c partie fixe.

On demande de calculer le nombre de billets vendus, lorsque toutes les autres quantités (S, H, h, b, c) sont connues.

Voici la suite des écritures produites par un élève, qui au demeurant parvient à la solution.

$$S = H + B + partie\ fixe$$
$$(xH \times 1\mathrm{H}) + (xB \times 1\mathrm{B}) + partie\ fixe = S$$
$$\frac{S - (xH \times 1\mathrm{H} + c)}{b} = B$$

La première écriture traduit l'idée que le salaire est la somme de la rémunération horaire, de la rémunération liée aux billets et de la partie fixe. C'est une idée juste, mais les quantités ne sont pas analysées plus avant.

La seconde écriture est la traduction non conventionnelle d'une analyse dont on aperçoit aisément le sens : nombre d'heures (xH) multiplié par la prime horaire (1H). La lettre H n'a pas le même sens dans les deux occurrences, sauf à représenter le nom commun « heure » ; x a le sens de « nombre de », et 1H le sens de « prime pour une heure ».

L'expression xB x 1B s'analyse de la même manière.

La dernière écriture est surprenante, puisque certaines règles de l'algèbre retrouvent une place : la soustraction de S de la parenthèse (xh x 1H + c), et la division par b. Au passage le sens de la capitale H et de la minuscule h est différencié.

Au total, les écritures personnelles de l'élève sont interprétables, mais elles mélangent algèbre et langage ordinaire, tout en s'appuyant sur une représentation des quantités et de leurs relations qui relèvent davantage d'une conceptualisation de type « invariants opératoires » que d'une conceptualisation algébrique.

Nous pouvons tous avoir de telles dérives opportunistes. Cela traduit le poids des conceptualisations informelles dans le fonctionnement de la pensée. C'est une caractéristique importante des schèmes.

## Conclusion : qu’est-ce que la représentation ?

Pour conclure, il me semble nécessaire de présenter une réflexion synthétique sur le concept de représentation, dont les behavioristes voulaient se débarrasser, au prétexte qu’on n’avait pas accès à la représentation d’autrui. En réalité la psychologie ne saurait se passer de ce concept qui, avec les concepts d’activité et de développement, est constitutif de la discipline, et indispensable aussi aux disciplines qui s’appuient en partie sur la psychologie. C’est le cas de la didactique, même si, bien entendu, celle-ci s’appuie sur plusieurs autres sources d’inspiration, en premier lieu le domaine d’activité dont l’apprentissage est visé et son épistémologie.

Je propose de distinguer quatre composantes du concept de représentation, complémentaires entre elles, et non indépendantes l’une de l’autre. Chacune mérite un court commentaire. Je serai bref.

Ces quatre composantes peuvent être énoncées de la manière suivante :

- le flux de la conscience ;
- les invariants opératoires : concepts-en-acte tenus pour pertinents et théorèmes-en-acte tenus pour vrais dans l’action ;
- les systèmes de signifiants/signifiés : le langage et les autres systèmes symboliques ;
- l’ensemble des schèmes d’organisation de l’activité.

La prise de conscience est essentielle pour comprendre les sauts qualitatifs dans l’apprentissage et dans l’expérience. Mais il est intéressant aussi de considérer une dimension moins exceptionnelle de la conscience : le flux quasi permanent d’images, de mots, de gestes et de sons, plus ou moins intériorisés dont chacun de nous a l’expérience personnelle. Le poids de l’imagination, notamment de l’évocation des objets absents ou non observables, est évidemment important pour saisir le contenu du flux de la conscience ; mais la perception aussi est essentielle, et ce sont souvent les processus perceptifs qui permettent de voir l’importance des invariants opératoires dans la conceptualisation : en effet, il n’y a pas d’action sans une certaine identification des objets et de leurs propriétés. Souvenons-nous de la relation d’encastrement et de la propriété d’antisymétrie.

Concernant les invariants opératoires, je n’ai guère besoin d’ajouter des commentaires, vu les exemples que j’ai évoqués plus haut à propos des structures additives et multiplicatives.

Les systèmes de signifiants/signifiés jouent un tel rôle dans la conceptualisation que certains auteurs, et non des moindres, ont tendance à identifier les concepts avec les mots qui les désignent (avec les mots ou les symboles). C’est une erreur d’appréciation, et pourtant il ne faut pas minimiser le fait que la symbolisation change le statut cognitif des concepts. En outre la science est faite de textes, même si les textes ne sont pas suffisants pour saisir la source et la portée de l’entreprise scientifique. La science est opératoire ou n’est pas. On mesure l’importance du langage jusque dans le mouvement même de la conscience, puisque le flux de la conscience est pour une part une parole intériorisée : son rôle est important dans la planification, la préparation et l’accompagnement de l’action.

S’il faut placer les schèmes dans la fonction de représentation, c’est parce que celle-ci n’est ni seulement un dictionnaire ou une bibliothèque, mais aussi, et d’abord, une activité. Il s’en suit que les formes particulières d’organisation de l’activité que sont les schèmes doivent faire partie intégrante de la représentation. L’imagerie cérébrale n’est pas en mesure aujourd’hui, et pour une période assez longue probablement, de nous fournir des exemples de schèmes circonscrits à des classes de situations bien définies (comme par exemple les schèmes de dénombrement) ; mais au moins elle met bien en évidence l'activité intense et multiforme des quelques 20 milliards de neurones dont les orbites d'activité, si elles pouvaient être circonscrites davantage, fourniraient un témoignage de l'existence neurophysiologique des schèmes.

Mais il n'est pas besoin du témoignage de la neurophysiologie pour considérer que les schèmes forment un ensemble différencié et hiérarchiquement organisé, dans lequel les formes s'appellent les unes les autres, des plus particulières aux plus générales et réciproquement. C'est la propriété d'adaptation aux situations nouvelles qui constitue le critère le moins contestable de la place qu'occupent les schèmes dans la représentation, dans son fonctionnement, et dans son développement.

## Compléments

*Dans la discussion qui a suivi l'exposé, Gérard Vergnaud a été amené à préciser certains points :*

*A une question de Pierre Duchet : Est-ce qu'on pourrait dire que le schème c'est la partie invariante commune à tous les sujets, ou au contraire la partie propre à chaque sujet, celle qui rend compte de la variabilité ? Et est-ce qu'il y a autre chose que les schèmes pour traduire la variabilité des sujets ?*

Réponse de GV : Le concept de schème désigne d'abord la manière dont un individu organise son activité face à une certaine classe de situations. Il est vrai aussi qu'il existe des schèmes dans la culture d'une communauté, une classe par exemple, ou un groupe professionnel. Mais il est sage d'essayer de saisir le schème à travers les formes personnelles d'organisation de l'activité ; elles ne sont pas réductibles aux formes retenues dans un collectif.

Les émotions aussi sont source de variabilité bien évidemment, mais cela complique le tableau pour qui est préoccupé d'abord par le développement de la rationalité. Ce que j'ai dit aujourd'hui n'épuise nullement le problème de la variabilité, ni entre individus, ni chez le même individu selon les situations. En outre, il existe de la rationalité et de l'opératoire dans les émotions, même si les aspects non rationnels semblent quand même l'emporter. Enfin les émotions aussi sont organisées par des schèmes : le schème n'est pas synonyme de volontaire ou de délibéré.

Je voudrais ajouter une dernière idée : les collègues peu familiarisés avec le concept de schème acceptent assez aisément l'idée que cela puisse désigner l'activité dans des situations familières ou dans des tâches répétitives, mais ils ne l'acceptent guère pour l'invention et la découverte en situation. Or, justement, si ce sont les schèmes qui s'adaptent au cours de l'expérience, il faut leur reconnaître le caractère de ressource, et considérer que c'est en puisant dans leur répertoire de schèmes que les sujets s'adaptent, lorsqu'ils sont face à une situation nouvelle ; même si les ressources ne se réduisent pas aux schèmes.

*A une question d'Alain Bronner : Je voudrais que tu reviennes sur les relations entre conceptualisation et représentation. Tu en as parlé au début de ton exposé, mais je suis un peu déconcerté par ce que tu as dit à la fin sur la représentation. Comment vois-tu l'articulation ?*

Réponse de GV : La conceptualisation est effectivement essentielle dans la représentation, même si cette conceptualisation est fragmentaire, et éventuellement fausse. Ce que je mets dans la conceptualisation, c'est à la fois les invariants opératoires (qui sont constitutifs des schèmes), et aussi les catégories prédicatives qui nous permettent de parler du réel. Les systèmes de signifiants/signifiés contribuent à assurer une certaine stabilité des invariants opératoires, notamment en raison du partage des significations dans une communauté donnée. On pense mieux les choses avec d'autres que tout seul. La communication est essentielle et nous avons besoin pour cela du langage naturel et des systèmes symboliques, même si la signification des formes langagières et des symboles n'est pas exactement la même pour tous, y compris dans la même communauté.

Je vais donner un exemple avec le concept de volume, sur lequel nous avons abondamment travaillé à Orléans, avec André Rouchier, Graciela Ricco, Janine Rogalski et quelques autres, il y a plus de 20 ans. J'évoque seulement les deux conceptions du volume que sont la conception unidimensionnelle (le volume mesuré avec un autre volume) et la conception tridimensionnelle (le volume mesuré avec des informations sur les longueurs comme dans le volume du parallélépipède rectangle). Je ne m'attarde pas sur ces deux conceptions et sur les interférences qu'engendre leur coexistence, et je retiens seulement la question de la lecture de la formule du volume du prisme droit $V = AH$. Elle permet de montrer que nous avons besoin d'invariants opératoires pour lire et utiliser une formule.

Que trouvait-on dans les manuels de la classe de cinquième à l'époque ?

Evidemment l'utilisation directe de la formule : *pour calculer le volume, je dois connaître l'aire de base et la hauteur , et je multiplie l'une par l'autre*. Eventuellement, mais pas dans tous les manuels, la lecture indirecte : *pour calculer l'aire de base, je dois connaître le volume et la hauteur et diviser l'un par l'autre*. Mais il existe une troisième lecture, qui ne figurait à l'époque dans aucun manuel sauf celui de Deledicq, à savoir que *le volume est proportionnel à la hauteur quand l'aire de base est tenue constante, et à l'aire de base quand la hauteur est tenue constante*. Or c'est la véritable raison conceptuelle de la formule, liée à son caractère bilinéaire, et à l'indépendance des deux variables aire de base et hauteur. Les systèmes de signifiants/signifiés sont très importants dans la conceptualisation, mais il y a un prix à payer, le décodage des rapports signifiants/signifiés. Ce décodage, ou plutôt cette lecture, implique une conceptualisation, laquelle dépend largement des invariants opératoires. En résumé, pour répondre à Alain, la conceptualisation est bien au centre de la représentation, mais sous plusieurs formes.

*A la question de Fabrice Vandebrouck : Je comprends qu'il y a des gros schèmes et des schèmes plus petits ; aussi lorsque j'étudie les pratiques d'un enseignant dans diverses situations, et que je regarde sa manière d'intervenir et d'organiser l'activité de ses élèves et la sienne, est-ce que je peux parler de sa pratique comme d'un gros schème ?*

Réponse de GV : Le concept de pratique est un peu comme ceux de compétence et de personne, très général et pas véritablement scientifique à lui tout seul. Il n'est pas suffisamment circonscrit par des classes de situations, et pas suffisamment analytique. C'est d'ailleurs ce qui m'a conduit à relier la définition du schème à l'existence d'une classe de situations identifiée. Ce souci de rigueur m'est d'ailleurs venu à partir de mes lectures sur les algorithmes (Trathenbrot).

Le mieux est l'ennemi du bien et, malgré ses insuffisances, on peut progresser avec le concept de pratique. Mais il faut essayer d'approfondir nos analyses, parce que les conceptualisations contenues dans l'action en situation varient d'une situation à l'autre et d'un schème à l'autre : par exemple il existe une certaine variété de situations de proportionnalité et de schèmes de traitement ; ils n'appellent pas les mêmes théorèmes-en-acte. S'en tenir au concept de proportionnalité serait insuffisant.

Suzon Nadot avait soutenu une thèse de didactique avant de se consacrer à l'analyse des pratiques. Elle avait alors étudié la relation entre le graphe d'une fonction, sa représentation analytique, et le référentiel graphique support du graphe ; et elle avait eu la bonne idée de faire varier le graphe et le référentiel en tenant invariante la représentation analytique, de faire varier le graphe et la forme analytique en tenant le référentiel constant (ce que l'on fait le plus habituellement), et de faire varier le référentiel et la forme analytique en tenant le graphe constant, ce qu'on fait rarement dans l'enseignement. Dans les études sur les pratiques, on ne peut guère espérer circonscrire des situations aussi précisément définies, en tous cas pour l'instant. Et pourtant les pratiques existent ; on peut les considérer comme de gros schèmes, ainsi que le suggère Fabrice.

En didactique professionnelle, on étudie bien des pratiques, mais justement on tire les leçons des recherches en didactique des disciplines et l'on cherche aussi à identifier des schèmes et des invariants opératoires: un bon exemple est celui de la recherche de Sylvie Caens-Martin sur la taille de la vigne. J'aime beaucoup cet exemple, non seulement parce qu'il s 'agit de la vigne et du vin, mais aussi parce que la finesse des prises d'information du tailleur sur le cep est absolument surprenante et que les conceptualisations sont légion, concernant le nombre et l'aspect des pousses, la charge du pied de vigne et l'espace occupé, la vigueur du cep, et sa capacité à tirer bénéfice des tailles antérieures : il faut interpréter les traces qu'elles ont laissées, et anticiper les évolutions ultérieures.

## Références

La liste qui suit n'est pas véritablement une liste de références, seulement la liste des auteurs évoqués. Un encouragement à les lire.


Bachelard G. (1949) *La psychanalyse du feu*.Paris, Gallimard.

Bachelard G. (1961) *La poétique de l'espace.* Paris, Presses universitaires de France.

Bachelard G. (1983) *L'eau et les rêves*. Paris, Corti.

Caens-Martin S. (1999) Une approche de la structure conceptuelle d'une activité agricole : la taille de la vigne. *Education Permanente.* 39, p 99-114.

Darwin C. (1985 édition française récente, traduction d'Edmond Barbier) *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle, ou la lutte pour l'existence dans la nature*. Paris, Editions La Découverte.

Deledicq A. (1982) *Faire des mathématiques*, manuel de 5°. Paris, éditions Nathan.

Dewey J. (1916, 1975 traduction française) *Démocratie et éducation*. Paris, Armand Colin.

Da Rocha Falcao J. T. (1992*). Représentation du problème, écriture de formules et guidage dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre*. Thèse de doctorat. Université Paris 5, René Descartes.

Frege G. (1971) *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris, Editions su Seuil.

Fuson K.C. (1988) Children's counting and concepts of number. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1991). Relations entre comptage et cardinalite chez les enfants de 2 a 8 ans In J. Bideaud, J. P. Fischer, & C. Meljac (Eds.), *Les chemins du nombre*. Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires de Lille.

Gréco P. (1991) *Structures et significations. Approches du développement cognitif*. Textes réunis et présentés par D. Bassano, Ch. Champaud, H. Lehalle, avec la collaboration de C. Marlot. Paris, Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

Guilbaud G. Th (années 1965-70) Séminaire (non publié) de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales.

Kant E. (1781, 1976 pour une traduction française récente) *Critique de la raison pure*. Paris, Garnier-Flammarion.

Leontiev A. (1992 traduction française) *Le développement du psychisme ; Problèmes*. Paris, Editions Sociales.

Leontiev A (trad. Française) *Activité, conscience et personnalité*. Paris, Editions du progrès.

Nadot S. (1991) *Représentations graphiques et études de fonctions. Les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère. Une approche par la programmation informatique d'un traceur de courbes*. Thèse . Paris, Université René Descartes.

NewellA. & Simon H.A (1995). *GPS, a program that simulates human thought*. Cambridge, MIT Press.

Piaget, J. (1936, 1994). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Lausanne-Paris, Delachaux et Niestlé.

Piaget J. (1964, 3ème édition), *La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

Piaget, J.(1949), *Introduction à l'épistémologie génétique.* Paris, Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance*. Paris, Gallimard.

Platon. (2005 traduction française récente de B. Piettre) *La République (livre 7) Le mythe de la caverne*. Paris, Nathan.

Revault d'Allonnes G. (1915) Le schématisme. *Compte rendu de la 43ème session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*. Paris : Masson et Cie, p 563-574.

Revault d'Allonnes G. Le mécanisme de la pensée: les schèmes mentaux. *Revue philosophique*, 60. fac similé dans *Psychologie Française*, 2000, 45.

Russell B. (1961) *Histoire de mes idées philosophiques*. Paris, Gallimard.

Suppes P. (1963) Basic measurement theory. In R.D.Luce (Ed) *Handbook of mathematical psychology,* New York, Wiley

Trahtenbrot P. A. (1963) *Algorithmes et machines à calculer.* Paris, Dunod.

Vergnaud G. (1968) *La réponse instrumentale comme solution de problème : contribution.* Thèse, Faculté des Lettres et Sciences humaines de Université de Paris.

Vygotski, .L.S. (1934/1985), *Pensée et langage,* Paris, Editions sociales.

## Lectures complémentaires possibles

Vergnaud G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berne, Peter Lang. 6 éditions ; traduit en espagnol (1991), en italien (1994), en russe (1998), et en portugais (2010).

Vergnaud G.(Ed) (1991) *Les sciences cognitives en débat. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives*. Paris, Editions du CNRS.

Vergnaud G. (Ed) (l994). *Apprentissages et Didactiques. Où en est-on* ? Paris, Hachette.

Vergnaud G., Bregeon J. L., Dossat L., Huguet F., Myx A.,Peault H. (1997) *Le Moniteur de Mathématiques. Cycle 3*. Paris, Nathan.

Vergnaud G. (2000) *Lev Vygotski : éducateur et penseur de notre temps.* Paris, Hachette Education.

Vergnaud G. (Ed). (1983). Didactique et Acquisition du Concept de Volume. N° spécial de *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59

Vergnaud G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes,* Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud G. et al. (l990) Epistemology and psychology of mathematics education. In J. Kilpatrick & P. Nesher (Eds*). Mathematics and cognition.* Cambridge, Cambridge University Press, pp 2-17.

Vergnaud G. (1996) La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed). *Didactique des Mathématiques.* Delachaux et Niestlé. Lausanne

Vergnaud G., Récope M. (2000) De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.

Samurcay R; Vergnaud G. (2000) Que peut apporter l'analyse de l'activité à la formation des enseignants et des formateurs? *Carrefours de l'éducation,* 10, 48-63.

Vergnaud G. (2002) Piaget visité par la didactique. *Intellectica,* 33, 107-123.

Pastre P., Mayen P., Vergnaud G. (2006) La didactique professionnelle : note de synthèse. *Revue Française de pédagogie.* INRP, 154, 145-198.