Le long terme et le court terme dans l'apprentissage des mathématiques

In Colloque de Curitiba, Brésil
Conférence prononcée

2010 (2-4 mars)
Curitiba, Brésil

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2010_Long-Terme-Court-Terme_Colloque-Curitiba

Curitiba article 2-4 mars 2010

Le long terme et le court terme dans l'apprentissage des mathématiques

Gérard Vergnaud

Le long terme se réfère inévitablement à une perspective développementale : ce n'est pas en quelques jours ou quelques semaines qu'un enfant acquiert une nouvelle compétence ou comprend un nouveau concept, mais au long de plusieurs années d'école et d'expérience. C'est à ce processus que s'adresse d'abord la théorie des champs conceptuels. Entre les premières compétences acquises par les enfants de 4 ou 5 ans concernant l'espace et les raisonnements sur les grandeurs par exemple, et les compétences qui posent encore problème à une partie des adolescents de 15 ans, on observe de nombreuses étapes et processus, des filiations et des ruptures :

des filiations, parce que les compétences nouvelles s'appuient en partie sur les compétences antérieurement acquises ;

des ruptures, parce que, parfois, la prise de conscience nécessaire à la formation d'une compétence nouvelle demande à l'enfant de s'écarter des idées et des manières de faire antérieures. Parfois il lui faut même les rejeter.

La théorie des champs conceptuels est étroitement liée, comme son nom l'indique, aux contenus conceptuels de l'activité ; elle se substitue aux théories générales du développement en termes de stades ou en termes de fonctions exécutives (attention, contrôle, mémoire à court terme) ; non pas que ces théories n'aient pas de sens mais, faute d'être suffisamment proches des contenus scolaires, elles ne sont pas véritablement opératoires dans l'enseignement.

Le court terme se réfère, lui, aux situations susceptibles d'être proposées utilement aux élèves à tel ou tel moment de leur développement, en fonction des compétences déjà acquises ou partiellement acquises, ainsi qu'à l'accompagnement que peut assurer l'enseignant pour faciliter et piloter le processus d'acquisition.

C'est dans le domaine de l'arithmétique ordinaire que j'ai réuni le plus d'observations et de réflexions sur la complexité progressive des situations mathématiques, mais cette double échelle de temps du long terme et du court terme vaut également pour l'algèbre et la géométrie ; elle vaut d'ailleurs pour d'autres disciplines et d'autres domaines d'activité. La thèse sous-jacente à cette entreprise théorique est que le contenu conceptuel spécifique des situations, des énoncés, et des représentations symboliques permet le mieux de saisir les filiations et les ruptures.

Le cas exemplaire des structures additives

Le champ conceptuel des structures additives fournit de nombreux exemples de situations dans lesquelles le choix d'une opération et des données auxquelles on l'applique est délicat, et appelle une mise en scène particulière, une aide significative de l'adulte, éventuellement une représentation symbolique originale.

Il existe deux situations prototypiques d'addition, dans lesquelles les enfants donnent un premier sens à cette opération:

- la réunion de deux parties en un tout (*trois filles et quatre garçons pour un anniversaire ; combien d'enfants en tout ?)*
- la transformation d'une quantité initiale (*Pierre avait 5 réals ; sa grand'mère lui donne 2 reals ; combien a-t-il maintenant ?)*

On peut évidemment passer d'une relation à l'autre, mais la première offre la possibilité d'un seul cas de soustraction (*connaissant le tout et une partie, trouver l'autre partie*), alors que la seconde offre la possibilité de quatre soustractions distinctes : soit la diminution d'une quantité initiale (prototype de la soustraction), soit la recherche d'une augmentation (état final moins état initial), soit la recherche d'une diminution (état initial moins état final), soit la recherche d'un état initial avant augmentation (*Jeanne vient de recevoir 3 reals de sa grand'mère ; elle a maintenant 8 reals ; combien avait-elle avant de recevoir le cadeau de sa grand'mère ?).*

La transformation d'une quantité initiale offre aussi la possibilité d'une addition non prototypique (*Robert vient de dépenser 3 reals, il en a maintenant 4 ; combien en avait-il avant d'acheter des bonbons ?)*

La recherche d'un état initial est une situation délicate pour beaucoup d'enfants jusqu'à la troisième année d'école élémentaire et au-delà. Non seulement ce n'est pas une situation prototypique, mais elle se heurte à l'obstacle du sens de la transformation directe, justement issu des prototypes de l'addition et de la soustraction :

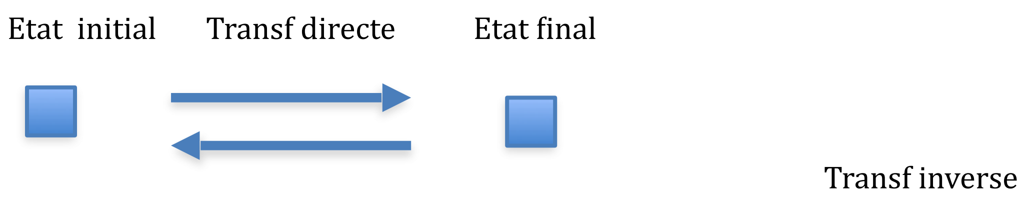
- la dépense de Robert conduit à envisager une soustraction et non une addition ;
- l'augmentation de la fortune de Jeanne conduit à envisager une addition et non une soustraction.

Pour adopter la bonne opération, il faut un nouveau théorème-en-acte :

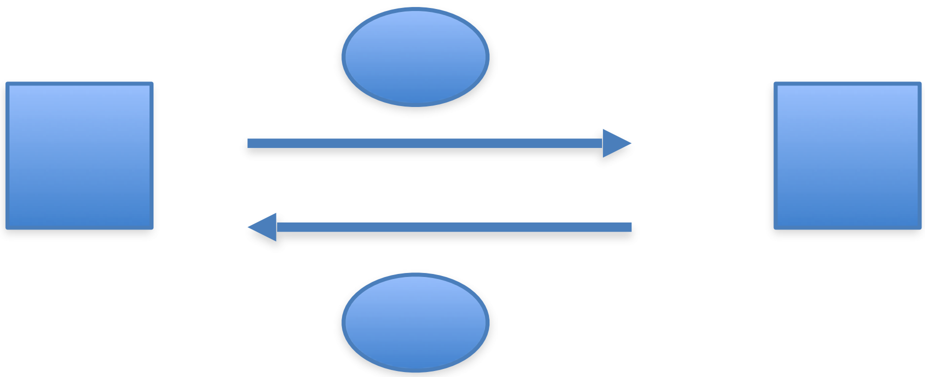
Si $F = T(I)$ *alors* $I = T^{-1}(F)$
F état final, I état initial, T transformation directe, T^{-1} *transformation inverse*

L'opération qui fait passer de l'état final à l'état initial est l'inverse de celle qui fait passer de l'état initial à l'état final.

On peut alors retenir plusieurs suggestions pour l'intervention des enseignants, concernant notamment les premières années de l'école élémentaire :
Ils peuvent montrer aux enfants qu'on peut regrouper et classer les différentes situations d'addition et de soustraction concernant la transformation d'un état initial en état final.
Ils peuvent utiliser pour cela un schéma fléché qui permet de relier entre eux les différents éléments de la relation



Le schéma n'est pas à rigoureusement indispensable pour faire comprendre aux enfants les différentes composantes de la relation, mais son laconisme permet de les relier entre elles d'un seul coup d'œil. Le schéma fournit ainsi un complément utile aux explications verbales, et permet notamment de saisir le lien entre transformation directe et transformation inverse. Lorsqu'on écrit les nombres dans les places réservées aux états et aux transformations, on mesure mieux encore les relations entre addition et soustraction : PLACER $T = -3$ $F = 4$ $T^{-1} = +3$



Enfin la différence entre transformations et états, déjà distinguée par les formes de rectangle et d'ellipse, se double alors de la distinction entre nombres relatifs (positifs et négatifs) pour les transformations et les opérations, et nombres naturels (sans signe) pour les états. Les enfants sont ainsi introduits à une représentation pré-algébrique.

Un deuxième exemple, toujours sur les structures additives, intéresse la fin de l'école élémentaire et les premières années de l'école secondaire : la décomposition d'une transformation composée connue en deux transformations successives dont l'une est connue et l'autre inconnue, comme dans l'exemple suivant :

Thierry a joué deux parties de billes, le matin et l'après-midi. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé le matin ; L'après-midi il a …(ici une première variable d'énoncé) ; et le soir en faisant ses comptes, il s'aperçoit qu'il a …(deuxième variable d'énoncé).
Que s'est-il passé le matin ? A-t-il gagné ou perdu des billes et combien ?

En manipulant les valeurs des deux variables d'énoncé, On peut observer des phénomènes saisissants ;

Gagné 6 l'après-midi ; gagné 15 en tout. Le problème est résolu sans difficulté ;
Gagné 15 l'après-midi ; gagné 6 en tout. Déjà sensiblement plus délicat ;
Perdu 6 l'après-midi ; perdu 15 en tout. Résolu sans difficulté ;
Perdu 15 l'après-midi ; perdu 6 en tout. Plus délicat ;
Gagné 6 l'après-midi ; perdu 15 en tout. Le problème donne lieu à un échec quasi général à la fin de l'école élémentaire, et une grande majorité d'échecs au début de l'école secondaire ;
Gagné 15 l'après-midi ; perdu 6 en tout. Idem, échec quasi général ;
Perdu 6 l'après-midi ; gagné 15 en tout. Idem ;
Perdu 15 l'après-midi ; gagné 6 en tout. Idem.

L'échec massif observé dans les quatre derniers cas peut être expliqué par le fait que les deux variables d'énoncé sont de signe contraire : de telle sorte qu'il faut faire une addition pour répondre, alors que la décomposition d'un tout en deux parties évoque l'idée de soustraction.
On pourrait penser que, après avoir appris les nombres relatifs à l'école secondaire (2ème et 3ème année), les élèves réussiraient mieux. En fait ce n'est guère le cas. L'obstacle de l'intuition première n'est pas levé facilement.

A contrario, la réussite massive des élèves dans les cas où la transformation totale (gain ou perte) est plus grande en valeur absolue que le gain ou la perte de l'après-midi, s'explique justement par le fait que les élèves ne tiennent pas compte du caractère positif ou négatif des transformations, et traitent le problème comme une situation partie/partie/tout ordinaire (un tout de 15, une partie de 6, l'autre partie c'est le complément). Ce glissement de sens opportuniste leur permet de fournir une réponse acceptable.
Dans le cas où la transformation totale est plus petite (en valeur absolue) que la transformation de l'après-midi, les élèves hésitent. Un autre glissement de sens est alors possible : tenir la partie de l'après-midi comme un état initial et la transformation totale comme un état final, calculer la réponse par différence.

Les idées de long terme et de court terme sont à nouveau pertinentes :
- Le long terme parce que certains cas sont résolus par de relativement jeunes élèves, alors que des élèves de 15 ans et des adultes restent en échec devant d'autres cas.
- Le court terme parce que c'est l'occasion pour l'enseignant de montrer à la fois la parenté des énoncés et la différence des opérations de pensée nécessaires à leur traitement.

Comment introduire l'algèbre ?

La famille de situations que nous venons de décrire rapidement permet aussi de montrer la continuité et la rupture entre arithmétique et algèbre ; on peut par exemple se servir des cas exposés plus haut pour montrer que les équations $x + a = b$ peuvent représenter des situations algébriquement très différentes :
$x + 6 = 15$; $x + 15 = 6$; $x - 6 = -15$; $x - 6 = +15$; etc

Ce n'est évidemment pas le seul artifice qui permette d'introduire l'algèbre. Si l'algèbre est d'abord un outil, et pas d'emblée un ensemble d'objets mathématiques (fonction, équation, variable, inconnue, polynôme, paramètre, vecteur, système…), il est raisonnable et même indispensable de l'introduire comme un moyen de résoudre des problèmes qu'on ne saurait pas résoudre facilement sans l'algèbre. C'est le moyen le plus direct de donner une fonctionnalité à l'algèbre.
Un exemple est le cas où une même quantité est exprimée de deux manières différentes, comme dans un partage inégal, lorsque le tout est la réunion de plusieurs parties et que l'une d'elles au moins est une fonction d'une ou plusieurs autres. Le tout est alors lui-même une fonction de fonction.
Ce cas rejoint celui des problèmes à deux inconnues, qui sont un cas exemplaire de raisonnement par l'algèbre, et qui devraient être proposés aux élèves sans attendre que soient épuisés les différents cas d'équations à une inconnue.

Une autre suggestion est de proposer aux élèves des situations dans lesquelles l'inconnue est une transformation, susceptible par conséquent d'être positive ou négative : on peut ainsi donner un sens à la solution négative d'une équation.

Ainsi le long terme conduit à examiner avec soin les relations conceptuelles entre arithmétique et algèbre, comme d'ailleurs les relations entre arithmétique et géométrie, ou entre algèbre et géométrie. Mais, il faut le souligner, ces relations entre grands chapitres des mathématiques, ont aussi un sens dans le court terme de l'apprentissage en classe, et pour les propositions de situations susceptibles d'être faites par l'enseignant, ainsi que pour ses commentaires.

Un exemple dans les structure multiplicatives

Les situations de proportionnalité sont le cadre principal des situations dans lesquelles le raisonnement conduit à devoir faire une multiplication, ou une division, ou une suite de telles opérations. Le modèle de la loi de composition binaire ne permet pas d'identifier et de mesurer comme il le faudrait le poids propre des grandeurs en jeu et le fait que les situations de multiplication et de division s'analysent presque toujours comme des relations à quatre termes, et donc comme des situations de quatrième proportionnelle. Dans les tableaux ci-dessous, en supposant que la colonne de gauche indique les poids de fruits d'une certaine catégorie, et la colonne de droite les coûts correspondants, on peut représenter avec le même schéma de base quatre cas de proportionnalité simple : la multiplication, la division partition (recherche de la valeur unitaire connaissant le prix payé c et la quantité achetée b), la division quotition (recherche de la quantité achetée connaissant la valeur unitaire a et le prix payé c), et enfin la recherche d'une quatrième proportionnelle.

Proportionnalité simple

Multiplication

1	**a**
b	**?**

Partition

1	**?**
b	c

Quotition

1	**a**
?	c

Quatrième proportionnelle

a	**c**
b	**?**

En fait, dès l'apprentissage de la multiplication, les élèves sont conduits à des opérations de pensée qui ne se laissent pas réduire à des opérations numériques, mais impliquent aussi des raisonnements sur les quantités et les grandeurs, sorte d'analyse dimensionnelle avant la lettre.
En effet, les deux sortes de rapports utilisables dans le raisonnement sont :

1 les rapports *scalaires*, ou rapports entre grandeurs de même nature, entre des poids par exemple :
« b fois plus que 1 » dans la multiplication : multiplier le prix unitaire *a* par ce rapport vertical pour trouver f'(b) ;
ou encore « b fois moins que c » : diviser *c* par ce rapport dans la division partition pour trouver f(1) ;
ou encore « b fois plus que a » dans la quatrième proportionnelle, pour trouver f(b) quand on connaît f(a).
Les théorèmes en acte alors utilisés sont tous du type isomorphisme de mesures
$f(nx) = nf(x)$ et $f(x/n) = f(x)/n$ on s'en tient ici aux nombres entiers

2 les rapports de type *fonction entre variables* lorsque l'opération choisie intervient entre grandeurs de nature différente, par exemple entre un poids et un prix à payer (dans la multiplication pour passer horizontalement de b kg au prix correspondant, ou de la dépense c à la quantité de fruits correspondante dans la division quotition).
Cela revient à utiliser le coefficient de proportionnalité k, qui est égal à f(1) :
$f(x) = kx$ et $x = f(x)/k$
Les deux formes de raisonnement se ressemblent, et pourtant elles sont conceptuellement très différentes : *k est un quotient de dimensions (réals par kilo), alors que n est un rapport scalaire sans dimension*.

Parlons du long terme d'abord : c'est en physique principalement que vont devoir être développés les rapports entre grandeurs différentes, notamment pour celles qui sont des fonctions de plusieurs autres variables. L'analyse dimensionnelle devient alors un enjeu conceptuel décisif : le concept d'énergie mécanique, celui de puissance en électricité, sont des produits de plusieurs autres grandeurs.
En fait, dès l'école élémentaire et les premières années de l'école secondaire (jusqu'à 14 ou 15 ans) les élèves rencontrent aussi des produits de dimension (les mesures spatiales, aire et volume), ainsi que des quotients de dimension (la vitesse, les densités de toutes sortes, la masse volumique). D'autres exemples importants, dans l'arithmétique du quotidien, sont la production ou la consommation en fonction du nombre de personnes et de la durée.

Parlons du court terme maintenant et des formes de médiation auxquelles l'enseignant peut recourir ; il s'agit dans l'exemple ci-après de faire prendre conscience aux élèves de la structure de double proportionnalité. Voici un exemple qui a été expérimenté et observé en dernière année de l'école élémentaire.
Les élèves préparaient un séjour en classe de neige et devaient calculer les quantités de nourriture nécessaires pour 50 enfants pendant 28 jours. Ils lisent dans une documentation qu'il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants.
Ils s'engagent alors dans des tentatives de calcul plus ou moins complexes : consommation par jour et par enfant, calcul de la quantité en tenant compte seulement de la durée, ou seulement du nombre d'enfants, autres tentatives.

Un enfant, au fond de la classe, (appelons-le Victor) se lève alors et déclare : *« c'est facile ! 5 fois plus, 4 fois plus, ça fit 20 fois plus !* »

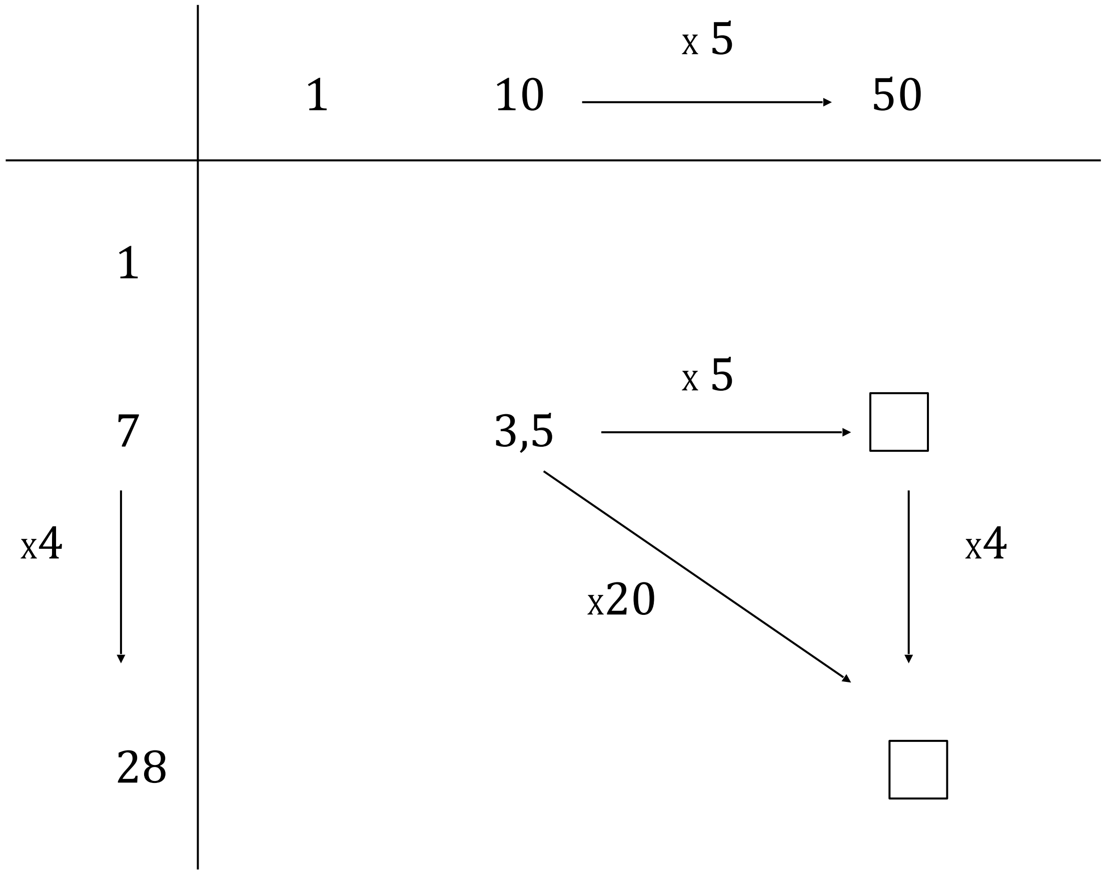
Première remarque : cet enfant utilise une propriété des fonctions bilinéaires, qui ne lui a pas été enseignée, et qu'on peut représenter de la manière suivante :
Sucre (50 pers, 28 jours) = Sucre (5.10 pers, 4.7 jours) = Sucre 5.4 (10 pers, 7 jours)
Soit en termes plus savants $f\,(5.\ 10, 4.7) = 5.4\, f\,(10, 7)$
Cas particulier du théorème des fonctions bilinéaires : $f\,(k_1x_1, k_2x_2) = k_1.\ k_2\, f\,(x_1,x_2)$

Deuxième remarque : ce que nous venons d'écrire n'est pas à la portée des élèves à la fin de l'école élémentaire. Se pose alors la question : comment le maître peut-il expliciter le raisonnement de Victor ? Pour les autres élèves et pour Victor lui-même.
La formule $S = k\ P.J$ est encore plus complexe que le raisonnement qui précède, et d'ailleurs elle s'appuie sur ce raisonnement, et sur des considérations tout aussi délicates :
La quantité de sucre est proportionnelle au nombre de personnes quand la durée est tenue constante ;
Elle est proportionnelle à la durée quand le nombre de personnes est tenu constant ;
Les deux variables « nombre d'enfants » et « durée » sont indépendantes.
Donc la quantité de sucre est proportionnelle au produit.

Le tableau à double entrée de la page suivante permet de rendre compte d'une manière plus lisible de ces propriétés.
Proportionnalité simple par rapport au nombre d'enfants (lecture horizontale, ligne à ligne) ;
Proportionnalité simple par rapport à la durée (lecture verticale, colonne à colonne) ;
Diagramme commutatif des rapports « fois 5 » et « fois 4 » à l'intérieur du tableau pour la variable quantité de sucre.

Bien entendu, il ne suffit pas d'une situation, ni d'une séance de commentaires sur cette situation et sur le graphique correspondant pour que les élèves comprennent la proportionnalité double ; mais cette représentation symbolique a de grandes vertus pour représenter les deux proportionnalités et leur indépendance, grâce justement aux propriétés du signifiant spatial bidimensionnel. C'est là encore une forme de représentation préalgébrique. Elle a une fonction de médiation. Rappelons-nous que Vygotski invoquait deux aspects distincts concernant les processus de médiation : l'enseignant et le symbolisme.

Tableau de double proportionnalité



Que conclure ?

Le concept de schème est essentiel puisqu'il désigne des formes d'organisation de l'activité pour des classes de situations bien identifiées, et circonscrites. Le couple théorique *situation/schème* doit donc être substitué au couple *stimulus/réponse*, trop étroitement behavioriste ; le couple *objet/sujet*, pourtant incontournable, est lui-même trop général pour permettre des expérimentations précises. Mais ce privilège théorique du couple *situation/schème* ne doit pas conduire à mésestimer le rôle du langage et des autres formes symboliques dans la conceptualisation et dans la communication, y compris dans la communication didactique. L'enseignant est un médiateur essentiel évidemment, mais son rôle ne se borne pas à accompagner l'activité des élèves par la tutelle : la présente contribution tente de montrer que sont essentiels, dans la professionnalité de l'enseignant, les deux fonctions du choix des situations proposées aux élèves, et de la représentation de leur structure conceptuelle par des formes symboliques accessibles.