Principes de psychologie
Pour l'étude des compétences complexes

In Principes de psychologie

Vergnaud Gérard

2011 - Texte non publié, version provisoire non corrigée

Principes de psychologie

Pour l'étude des compétences complexes

Gérard Vergnaud

Les longs ouvrages me font peur
La Fontaine

A quelles questions cet ouvrage s'adresse-t-il ?

La science est réduction, et les principes sur lesquels on fait reposer une discipline ou une sous discipline sont un moyen normal, et même privilégié, d'opérer cette réduction. Ils ont le mérite de la brièveté. Leur mérite le plus important est d'aller à l'essentiel et de faire partager par une certaine communauté scientifique les points théoriques et méthodologiques constitutifs du domaine de connaissance en jeu. Cette communauté peut être plus ou moins large, mais les cas où l'on obtient rapidement un accord de cette communauté sont exceptionnels ; à dire vrai il n'y en a pas. Toutes les réductions ne se valent pas, et il est normal que les esprits soient partagés sur le choix de ce qu'il faut retenir d'essentiel.
La psychologie a connu plusieurs efforts de réduction à des principes, notamment au moment où elle a commencé à se constituer comme science, à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème :Wundt, Pavlov, James, Bechterev, Binet, Freud… Les connaissances en psychologie restaient loin encore des ambitions affichées, mais au moins l'ambition théorique était là, bien vivante. C'est la vague behavioriste qui a fait le plus durablement obstacle aux efforts qui auraient permis de poser des principes comme ceux dont nous ressentons le besoin aujourd'hui : une psychologie des compétences complexes.
Mais qu'est-ce qu'une compétence complexe ? A certains égards, toutes les compétences sont complexes, si l'on entend par là qu'il est difficile de les analyser. Aussi n'est-ce pas de ce point de vue que nous nous plaçons, mais de celui du développement et de l'apprentissage : par définition, est « complexe » toute compétence « difficile ou délicate à acquérir ». La complexité est donc une notion relative, puisque ce qui difficile à acquérir par un enfant de cinq ans peut être trivial pour le même enfant quelques années plus tard. Le même phénomène vaut pour les adolescents et les adultes, que l'acquisition d'une nouvelle compétence résulte d'une formation dédiée à cette acquisition, ou simplement de l'expérience. Cela vaut pour tous les registres de l'activité : gestes, raisonnements scientifiques et techniques, interaction avec autrui, énonciation et dialogue, affectivité. Le choix de considérer les compétences complexes en priorité pour définir des principes, tient principalement au souci d'amarrer la psychologie à son utilité sociale : n'est-ce pas en effet dans l'éducation, la formation, l'éducation spéciale, la rééducation, le travail, la construction et la reconstruction de la personne, que la société et ses acteurs rencontrent le besoin de psychologie, justement pour comprendre les difficultés auxquelles ils se heurtent, et trouver des ressources originales.
L'enjeu académique n'est donc pas le seul enjeu, peut-être même pas le plus important du point de vue de la culture et de l'histoire des sociétés : l'utilisation de la psychologie dans l'éducation, le travail et la santé pourrait être éclairée, mieux que ce n'est le cas aujourd'hui, par la connaissance des principes qui régissent les phénomènes psychiques. Les gros traités essaient de pourvoir à ce besoin. Mais leur volume est dissuasif pour les utilisateurs. Il l'est

même pour les chercheurs scientifiques, dont c'est pourtant le métier que de se tenir informés et de faire les synthèses utiles.Il faut croire aux bienfaits de la brièveté.

A contrario, il existe certains dangers à s'engager dans la formulation de « principes ». Le premier d'entre eux est évidemment le réductionnisme, en entendant par là l'effort de réduction poussé à un point tel qu'il laisse échapper des questions et des phénomènes importants, et demeure ainsi en deçà de ses promesses. L'exemple le plus patent d'un tel excès est évidemment celui du behaviorisme, qui a crû pouvoir se passer du concept de représentation au moment même où celui-ci devenait le plus directement utile. Les versions le plus néfastes du behaviorisme sont devenues caduques, et l'on peut penser que c'est du temps perdu que de le combattre encore aujourd'hui. Mais les tentations réductionnistes continuent à aller bon train, qu'il s'agisse des neurosciences, de l'intelligence artificielle, voire des excès de la psychologie « cognitive » expérimentale elle-même. L'enjeu n'est donc pas nul. En même temps, la marge est étroite, parce que la fréquentation de la psychologie avec des approches différentes est féconde, à condition évidemment qu'elle n'y perde pas son identité.
Un autre danger de la recherche des « principes » est celui de l'abstraction ; non pas que l'abstraction puisse être évitée, puisque c'est l'enjeu même de principes, mais justement leur forme abstraite, parce que générale, peut empêcher le lecteur d'en saisir le sens. Le seul moyen d'éviter ce danger, au moins partiellement, est l'utilisation d'exemples. J'en prendrai de nombreux pour éclairer mon propos, sans perdre de vue cependant que ce sont les principes qui sont l'objet de cet ouvrage, non les exemples. Et d'ailleurs les exemples retenus ici ne sont qu'un petit échantillon des recherches dans lesquelles j'aurais pu puiser : sur l'utilisation des instruments, sur la lecture et la compréhension de textes, sur la formation de la personne, sur les activités collectives, j'aurais dû en dire beaucoup plus, mais cela m'aurait entrainé trop loin pour la dimension de l'ouvrage que j'avais envisagée.
Les exemples et le style choisis peuvent faire penser au lecteur qu'il s'agit d'un ouvrage de vulgarisation. Ce n'est pas tout à fait exact, ni totalement faux, dans la mesure où le but est de toucher un large éventail de personnes qui font usage de la psychologie, sans être des psychologues patentés. L'idée de « principes » est une idée ambitieuse, voir prétentieuse, et c'est une manière de réduire cette ambition que de donner des exemples. Ce faisant il faut pouvoir établir certaines relations entre les exemples et les principes. Et cela non plus n'est pas une mince ambition. C'est au lecteur d'apprécier l'effort fait pour accomplir un pas en avant dans le développement d'une psychologie théorique et concrète.

Chapitre 1 Activité, schème, situation

Définition liminaire de la psychologie

La psychologie a pour objet premier l'étude des formes d'organisation de l'activité et de leur développement au cours de l'expérience.

Considérer les formes d'organisation de l'activité comme les bases théoriques de la psychologie n'est pas habituel. Cela mérite quelques explications, que nous donnerons plus loin après avoir défini ce que nous entendons par là, grâce au concept de schème. Privilégier l'approche du développement cognitif par l'expérience peut surprendre également puisque la maturation joue aussi son rôle dans le développement. Mais il n'est guère possible d'agir sur les processus de maturation, alors qu'il est possible, dans l'éducation et le travail, d'agir dans une certaine mesure, sur les conditions dans lesquelles s'exercent et se développent les formes d'organisation de l'activité. L'apprentissage fait partie intégrante de l'expérience, avec cette particularité importante qu'il est intentionnel, et qu'ainsi il est un peu moins difficile d'en cerner les conditions.
Il est donc logique de mettre l'expérience au centre des préoccupations théoriques de la psychologie. Ceci est rarement fait, et c'est d'ailleurs difficile. L'étude des conditions dans lesquelles se forme l'expérience fait partie intégrante de la psychologie, même si la psychologie ne peut conduire cette étude à elle seule, et qu'elle doit travailler de concours avec d'autres disciplines.

Par activité, il faut entendre la conduite observable, et l'activité non observable, notamment les processus de représentation.

Cette définition écarte la réduction behavioriste. Mais la définition de la psychologie par l'étude des formes d'organisation de l'activité a une autre motivation, non moins importante : l'abandon du cadre théorique de la psychologie des facultés, qui a orienté les recherches depuis les débuts de la psychologie scientifique, et même depuis les premières approches philosophiques. Les facultés constituent un découpage peu fécond des objets de recherche et des connaissances en psychologie. Il n'est pas raisonnable d'espérer pouvoir étudier, indépendamment les unes des autres, la mémoire, l'intelligence, la perception, l'attention, l'émotion, le langage, le raisonnement, la motricité, les réflexes ou l'intuition. Dans l'activité, en effet, toutes les facultés sont sollicitées en même temps, a fortiori dans une activité complexe comme la résolution d'un problème de mathématiques, l'accomplissement d'un geste sportif ou d'un geste professionnel, la compréhension d'un texte, ou la lecture d'une partition musicale : mémoire, intelligence, perception et attention sont inévitablement convoquées, sans qu'il soit pratiquement possible de séparer l'une de l'autre.
Les bonnes unités d'étude ne sont donc pas les facultés mais les formes d'organisation de l'activité relatives à telle ou telle situation, ou plutôt à telle ou telle classe de situations. C'est ce qui justifie le poids accordé dans cet ouvrage au concept de schème. Comme il n'y a pas de schème sans situation, on peut dire de manière laconique que le moment est venu de substituer le couple théorique schème/situation au couple stimulus/réponse, qui a encombré la psychologie depuis des décennies, et empêché les psychologues d'aborder l'étude des compétences complexes. Qu'on ne se méprenne pas sur la signification de cette prise de

position : on ne peut pas tout étudier à la fois et il est normal qu'un chercheur concentre son regard sur certaines catégories de phénomènes et laisse les autres de côté ; mais si l'objet d'étude retenu est coupé de certaines des conditions qui permettent d'en comprendre les caractéristiques essentielles, on fait inévitablement fausse route. Il existe, dans l'histoire de la psychologie, quelques incroyables tentatives, comme l'étude de la mémoire avec des épreuves d'apprentissage de syllabes sans signification, ou comme l'utilisation des temps de réaction pour des tâches complexes de raisonnement. On doit pouvoir éviter à l'avenir de telles extravagances.

Le couple théorique situation/schème versus le couple stimulus/réponse et le couple objet/sujet

Le concept de « stimulus » est un concept faible, qui peut être défini par le type logique d'« événement », c'est-à-dire le changement de valeur d'une des conditions de la situation (a minima) ; parler de situation est une autre affaire puisqu'une situation est toujours faite de plusieurs conditions, parfois nombreuses et contrastées, et que l'activité du sujet dans une telle situation dépend non seulement des changements de valeur de certaines conditions, mais aussi des valeurs des conditions inchangées. Les caractéristiques de l'activité alors mise en œuvre par le sujet dépendent de ces valeurs, modifiées ou non.
Cet argument théorique est plus important qu'il ne peut y paraître, car il soulève la question de la représentation de cet ensemble de conditions, c'est-à-dire du réel. L'activité est fondée sur cette représentation ; elle ne peut être réduite au concept de « réponse ».
Les philosophes ont posé depuis longtemps la question du rapport au réel, et l'ont souvent posée en termes de rapports « sujet/objet ».
Le couple théorique sujet/objet offre certes une vision plus riche, mais elle ne permet pas pour autant de conduire l'analyse de l'activité en situation, qui est le défi méthodologique principal de la psychologie scientifique. Il est donc très important de définir les objets d'étude du psychologue de manière que cela lui permette à la fois de conduire des observations concrètes, et d'élaborer des théories rigoureuses et économiques. Par « économiques » j'entends le fait qu'elles reposent sur un petit nombre de concepts et de principes (et sont donc inévitablement réductrices). C'est cette double préoccupation qui m'a conduit à rechercher des objets théoriques intermédiaires entre le couple stimulus/réponse et le couple sujet/objet. Ce n'est qu'assez récemment (quelques années) que je suis parvenu à la conviction que le couple situation/schème est la réponse à cette recherche..
Entre le concept de schème et celui de classe de situations, la relation est dialectique : on n'a pas l'un sans l'autre. En outre, le schème contribue à l'identification de la classe de situations, et la situation à l'identification du schème. Il ne faut pas les confondre pour autant.
Nous verrons plus loin qu'il existe aussi une relation dialectique entre concept-en-acte et théorème-en-acte : pas de théorème sans concepts, et pas de concept sans théorèmes. Et pourtant il ne faut pas les confondre non plus.

Principe d'adaptation ou principe de Piaget : la connaissance est adaptation

Piaget n'est pas le seul à avoir avancé cette thèse que la connaissance est adaptation, mais c'est lui qui en a donné les exemples les plus convaincants, et indiqué clairement que l'adaptation comporte deux faces : l'assimilation du réel et l'accommodation au réel. Il a en outre précisé que, pour comprendre ce qu'est la connaissance, il faut en étudier le développement : c'était l'entreprise de l'épistémologie génétique.

Mais qu'est-ce qui s'adapte ? et à quoi ?
Ce qui s'adapte ce sont des schèmes, et ils s'adaptent à des situations. Se posent alors les questions : qu'est-ce qu'un schème ? qu'est-ce qu'une situation ?

Qu'est-ce qu'un schème ?

Prenons d'abord des exemples dans des domaines relativement contrastés pour illustrer la généralité du concept ;

Le schème du bébé de se lever dans son parc

A l'âge de 8 mois, Stéphanie se met debout dans son parc pour la première fois. Elle s'agrippe des deux mains aux barres verticales ; elle tire, aussi puissamment qu'elle peut, et parvient à dégager son pied droit pour le poser à plat ; en tirant toujours très fort sur ses bras et en s'appuyant sur son pied droit, elle parvient à se soulever un peu plus et à faire venir son pied gauche au secours du pied droit ; elle parvient aussi à saisir les barreaux du parc un peu plus haut, puis la barre horizontale ; et elle se retrouve debout.
Elle se rassied, et… elle recommence, jugeant que cet apprentissage n'est pas suffisant et appelle un certain exercice. Elle recommence ainsi pendant plus d'une heure : elle s'entraîne, comme le ferait un sportif de haut niveau, lorsqu'ii manifeste le besoin de maîtriser un geste nouveau, ou comme une danseuse. Mais Stéphanie ne recommence pas tout à fait de la même manière à chaque fois : elle expérimente des moyens différents : par exemple elle essaye de poser le pied gauche en premier, échoue et abandonne cette entreprise. Elle découvre par contre qu'en appuyant son bras et son épaule contre le bord du parc sur sa gauche, cela soulage un peu son effort. Elle parvient ainsi au bout d'un moment à une organisation de son geste provisoirement satisfaisante, temporellement bien réglée, notamment pour la phase fatidique au cours de laquelle le pied gauche doit venir au secours du pied droit.
Après quelques jours, quelques semaines ou quelques mois elle étendra la portée de ce nouveau schème à des cas de figure sensiblement éloignés de ce cas prototypique, en se servant d'une chaise au lieu de son parc, ou de la jambe de pantalon de son papa.

Le schème du dénombrement

Il se situe au fondement des compétences mathématiques. Sans le dénombrement il n'y a pas d'arithmétique. Chez l'enfant de 4 ou 5 ans, le dénombrement prend la forme d'une activité de correspondance entre les objets à dénombrer et trois registres de gestes : les gestes du doigt et de la main, les gestes du regard, les gestes de la voix. Quand l'enfant prononce la suite numérique « un, deux, trois, quatre », il ne récite pas la suite seulement, il la met en correspondance biunivoque avec les objets, et il s'assure de cette biunivocité en accompagnant son énonciation par des gestes synchrones dans les deux registres du regard et du pointage successif des objets avec le doigt et la main. De telle sorte que quatre ensembles sont mis en correspondance entre eux :objets, regards, pointages du doigt, mots-nombres. S'ajoute à cela le fait que l'enfant souligne (soit en le répétant, soit en l'accentuant) le double statut du dernier mot-nombre prononcé, à la fois quatrième élément dénombré et cardinal de l'ensemble : un deux trois quatre, quatre !
L'organisation de l'activité porte à la fois sur la perception visuelle, sur les gestes, sur le rappel en mémoire ; mais c'est sur les deux concepts de bijection et de cardinal que repose la bonne organisation de la suite des opérations. D'ailleurs les « ratés » du dénombrement, chez les enfants qui savent réciter la suite des mots-nombres, se manifestent soit par le fait qu'ils ne cardinalisent pas (et ne peuvent pas répondre à la question « combien? »), soit qu'ils ne

réussissent pas à synchroniser les gestes des différents registres (et à assurer la biunivocité entre la suite des mots et l'ensemble des objets).

Le schème du dénombrement s'enrichit au fil des années et de l'expérience. Par exemple, si deux personnes entreprennent de dénombrer les places d'un stade, comme il est arrivé à Nantes au moment de la préparation de la coupe du monde de football, elles peuvent se partager le travail et faire ensuite la somme des nombres obtenus par chacun ; pour cela, elles peuvent noter les nombres sur un papier et procéder ensuite à l'algorithme de l'addition ; elles peuvent aussi recourir à des techniques économiques pour les zones rectangulaires du stade et multiplier le nombre de places par rangée par le nombre de rangées ; elles peuvent même utiliser une technique relativement sophistiquée pour le calcul dans les angles du stade, en calculant d'abord la moyenne entre la rangée la plus longue en haut du stade et la plus courte dans le bas du stade, et en multipliant ce nombre moyen par le nombre de rangées.
L'organisation de l'activité des deux partenaires est évidemment beaucoup plus complexe que celle de l'enfant de 5 ans. Elle repose aussi sur des concepts et des théorèmes :

la somme Cardinal (A U B) = Cardinal (A) + Cardinal (B)
pourvu que les ensembles A et B soient disjoints
soit a+b

La numérationécrit (a) algo écrit(b)= écriture (a+b)
« algo » pour algorithme de l'addition

la multiplication Card (partie rectangulaire) = S x R
(R nombre de rangées, S nombre de sièges par rangée)

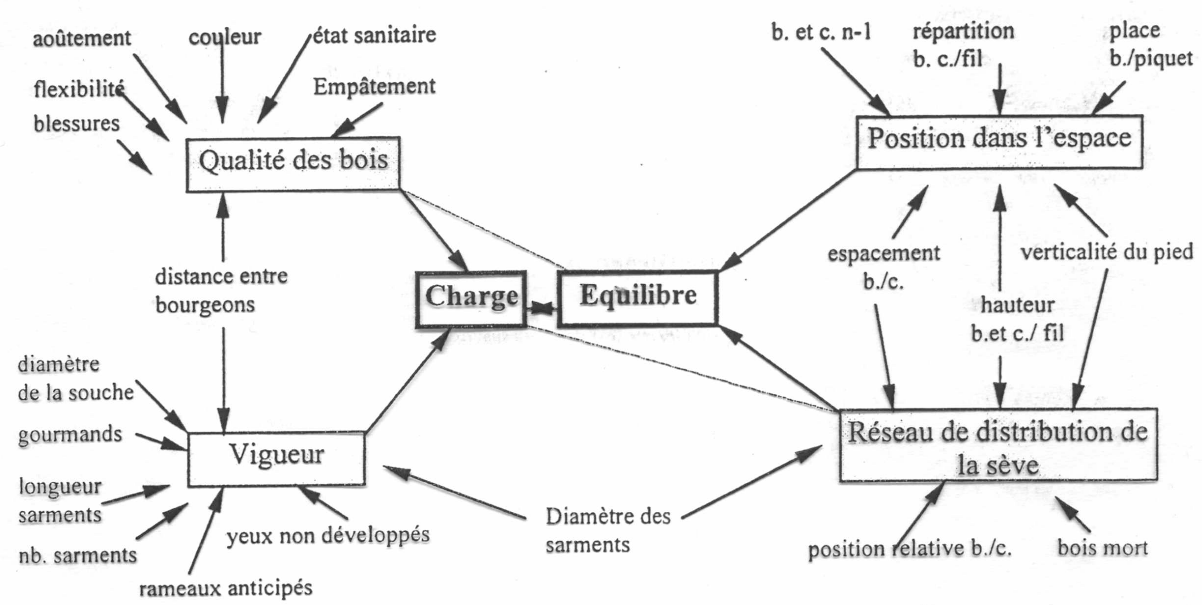
la moyenne (L + C) /2 multiplié par n
L = Card (rangée la plus longue) C = Card (rangée la plus courte)
n = nombre de rangées

Dans les deux cas, chez les deux compères du stade de Nantes comme chez le jeune enfant, les conceptualisations restent pour l'essentiel implicites. C'est pourquoi j'ai introduit les termes de « concept-en-acte » et de « théorème-en-acte ». Certains concepts, explicites pour le sujet qui les met en œuvre, sont aussi « en acte » lorsqu'ils sont utilisés à bon escient, mais beaucoup des connaissances que nous utilisons dans l'action, restent implicites. La forme opératoire de la connaissance est plus riche que la forme prédicative.

Le schème de la taille de la vigne

Il permet de montrer, dans un autre registre que les précédents, que la conceptualisation est présente dans toute activité.
La taille de la vigne est une activité complexe, pour laquelle l'apprentissage au sein de la communauté des viticulteurs et l'expérience personnelle sont essentielles. L'apprenti tailleur apprend certes des choses utiles au cours de sa formation professionnelle, mais cela n'est nullement suffisant. Pour prendre la mesure de la complexité de cette activité, Sylvie Caens-Martin a observé et interrogé de bons tailleurs de vigne et pu décrire les prises d'information et les raisonnements sous-jacents aux décisions de couper tel sarment et pas tel autre (Caens-Martin….). En voici une description succinte :
Le tailleur distingue entre ceps droits et ceps crochus, entre coursons bien placés et coursons hors du rang, entre charpente légère et charpente forte. Mais la ligne de démarcation entre ces

catégories suppose de l'expérience ; elle varie selon les individus et selon les vignobles ; les cas d'école sont peu fréquents et la hiérarchie des règles à suivre n'est pas définitivement arrêtée. En outre la taille peut avoir pour objet de restaurer une plante abîmée ou malade ; il faut alors interpréter l'état actuel du cep en retournant en pensée à l'année précédente, et construire des scénarios pour l'année suivante voire les deux années suivantes. On sait que la vigne n'est pleinement mature et ne donne son meilleur vin qu'au bout de 10 ou 15 ans. Le diagnostic est donc au centre de la compétence du tailleur de vigne. Beaucoup de concepts interviennent dans ce diagnostic ; la qualité des bois, la position dans l'espace, la vigueur, le réseau de distribution de la sève. Chacun de ces concepts est lui-même nourri par plusieurs autres concepts : par exemple l'évaluation de la vigueur repose sur plusieurs critères comme le diamètre de la souche, la longueur des sarments, leur nombre, leur diamètre, le développement des yeux, la distance entre bourgeons etc, et les tailleurs ont besoin de résumer leur jugement dans une évaluation globale qui repose sur deux idées fortes, celles de « charge » (assez mais pas trop de grappes sur chaque branche) et « d'équilibre » (bonne occupation de l'espace de chaque pied de vigne). Ces deux concepts ont un statut cognitif un peu meilleur que de simples concepts implicites, et sont utilisés dans la communication entre tailleurs, pour justifier les règles de taille. Pastré leur a donné le nom de « concepts pragmatiques ». Ils sont explicites dans la communauté professionnelle des tailleurs.



Caens-Martin résume toutes ces conceptualisations dans le schéma ci-dessus. Elle s'en sert aussi pour générer, sur un simulateur destiné à l'apprentissage de la taille, des cas de figure variés et contrastés.

Activité observable et non observable ; la question des unités d'étude

Concernant la conduite observable, il est moins difficile de décrire les gestes et les actions de transformation de ce qui est matériel (les objets matériels) ou matérialisé (les symboles linguistiques, algébriques ou graphiques), que les prises d'information par le regard, l'ouie ou tout autre moyen. Et pourtant l'activité de prise d'information est essentielle dans l'organisation de l'activité, parce que la réussite de l'action dépend beaucoup du choix de l'information pertinente. En outre la prise d'information fait elle-même l'objet d'évolutions

importantes au cours du développement de l'enfant et de l'adulte, lorsqu'ils gagnent en compétence et en expertise. C'est ce que montrent les études sur l'apprenti lecteur, l'apprenti sportif, l'apprenti mathématicien, l'apprenti musicien et, d'une manière plus générale, sur le développement professionnel.
L'activité non observable, quant à elle, ne peut être qu'inférée à partir de la conduite observable. Elle n'en joue pas moins un rôle essentiel en psychologie. Nous avons un témoignage direct de cette activité par le flux de la conscience. Mais notre expérience de la conscience ne nous permet que très partiellement de faire des inférences sur notre propre activité psychologique, moins encore sur celle d'autrui, à supposer qu'il soit en mesure de nous donner le témoignage de sa propre conscience. Le témoignage d'autrui est une source d'information très utile, mais très partielle, voire déformée : elle est souvent biaisée, en raison du décalage entre la forme opératoire de l'activité et ce que nous sommes capables d'en dire ; une grande partie de notre activité est et reste implicite et même inconsciente. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

L'activité est d'abord syncrétique (les éléments constitutifs en sont peu ou pas différenciés), comme l'illustrent les premiers gestes des bébés : dans l'allaitement, dans la capture des objets, dans les déplacements. Le syncrétisme est aussi une caractéristique forte des instincts. Les schèmes n'échappent pas à cette caractéristique, mais leur développement et leur différentiation seraient impossibles sans l'analyse des situations en termes d'objets et de propriétés, analyse qui n'est que partiellement consciente pour le sujet. C'est pourquoi il est essentiel pour la théorie psychologique de rechercher les formes de conceptualisation constitutives des schèmes: concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. Il est en effet impossible d'agir sans une certaine identification des objets et de leurs propriétés, y compris lorsque cette identification résulte d'une construction hypothétique, comme il a été dit plus haut.
On peut saisir certains aspects du réel et pas d'autres, s'intéresser aux aspects pertinents de la situation ou au contraire se faire piéger par des aspects non pertinents, ou encore par des interprétations fausses des aspects pertinents. Comme la représentation du réel forme un système très complexe, changeant au cours de l'activité, la question se pose du découpage des schèmes et des situations en unités d'étude ni trop grandes, ni trop petites, de manière que soit gérée au mieux la question de leur sens et de leurs relations. Il existe plusieurs catégories et plusieurs niveaux d'unités d'étude, selon l'empan temporel envisagé : cela peut aller du court terme ou même du très court terme d'un geste en situation, jusqu'au développement à moyen terme et à long terme d'une compétence, selon la complexité des circonstances (nature des objets et de leurs relations, présence et aide d'autrui, registres d'activité convoqués). C'est pourquoi il est très important de faire des choix qui permettent de mettre en évidence des faits susceptibles d'être examinés par la communauté des chercheurs, sachant qu'on peut s'intéresser à des objets de recherche ou très complexes, ou très simples.

Le concept de schème

Les schèmes que nous venons de décrire succinctement n'illustrent pas tous les points importants concernant l'organisation de l'activité ; mais ils sont suffisants pour justifier déjà une définition du concept de schème.
Nous proposons ci-dessous quatre définitions différentes, qui mettent l'accent sur des caractéristiques distinctes, progressivement plus analytiques. Ces définitions ne s'opposent pas entre elles, comme nous le verrons dans le commentaire.

Définition 1 : une totalité dynamique fonctionnelle

Définition 2 : une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations donnée

Définition 3 : une organisation composée de quatre sortes de constituants :

- -des buts, sous-buts et anticipations
- -des règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- -des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)
- -des possibilités d'inférence

Définition 4 : une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions, et ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions (n et n' très grands)

Le concept de situation

Comme une situation est ce à quoi s'adresse un schème, elle comporte toujours un but à atteindre, ou plusieurs, ou un problème à résoudre. Une situation peut être plus ou moins intéressante et problématique pour un sujet donné, mais ce n'est ni un simple stimulus, ni un objet seulement ; c'est un ensemble d'objets, de relations et de conditions, dans lequel le sujet peut engager une activité intentionnelle, et dans lequel il peut trouver éventuellement des ressources (autrui, instruments).

.

Commentaires sur le concept de schème

Définition 1 : une totalité dynamique fonctionnelle

Cette définition est pratiquement celle qui ressort des analyses de Piaget, notamment pour ce qui concerne les activités perceptivo-gestuelles, domaine le plus évident de la fécondité du concept. L'école de la gestalt avait introduit l'idée de totalité en prenant ses exemples surtout dans la perception ; Piaget l'appliquet à toute l'activité.

Définition 2 : une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situations déterminée.

- Ce qui est invariant c'est l'organisation, non pas l'activité, ni la conduite. Le schème n'est pas un stéréotype : au contraire, il permet l'adaptation de l'activité aux valeurs différentes prises par les variables de situation.
- Le schème s'adresse à une classe de situations ; cette classe peut être très petite, ou très grande. Au cours du développement cognitif, un schème a d'abord une portée locale, que le sujet devra ensuite élargir. Du fait qu'il s'adresse à une classe de situations, même petite, c'est un universel en ce sens qu'on peut le formaliser avec des règles et des concepts comportant des quantificateurs universels.
-Un schème n'est pas en général un algorithme. Certaines formes d'organisation de l'activité mathématique sont effectivement des algorithmes : ils aboutissent, en un nombre fini de pas (effectivité), au traitement de toute situation appartenant à la classe visée. Les algorithmes sont des schèmes, mais tous les schèmes ne sont pas des algorithmes ; on peut même ajouter que certains algorithmes perdent au cours de l'apprentissage ou de l'expérience certaines de leurs caractéristiques, notamment leur propriété d'effectivité : des erreurs et des raccourcis peuvent les priver de la propriété d'aboutir à coup sûr. L'incertitude reste ainsi une propriété des schèmes.

- L'analyse des schèmes passe inévitablement par l'analyse des conduites, mais le schème n'est pas une conduite, c'est un constituant de la représentation, dont la fonction est d'engendrer l'activité et la conduite en situation. Il nous faut donc analyser les composantes qui permettent le fonctionnement du schème. Cette analyse permet de mieux saisir ce qui distingue le schème d'autres concepts, qu'on confond éventuellement avec lui, comme ceux de schéma, de script, de scénario, de frame...lesquels concernent des objets, des situations ou des scènes, mais n'ont pas la fonction spécifique d'engendrer l'activité au fur et à mesure.

Définition 3 : les composantes du schème : but, règles, invariants opératoires, inférences
Le schème est une totalité dynamique fonctionnelle ; sa fonctionnalité est celle de cette totalité tout entière; non pas de telle ou telle composante seulement. Mais l'analyse des composantes du schème n'en est pas moins essentielle à la théorie, si l'on veut comprendre comment un schème peut être efficace ou non.

le but, les sous-buts, les anticipations.
Cette première composante représente dans le schème ce qu'on appelle parfois l'intention, le désir, le besoin, la motivation, l'attente. Mais aucun de ces concepts n'est à lui seul un schème ni même intégré au concept de schème. Si la représentation est composée de formes d'organisation de l'activité, et pas seulement d'images, de mots et de concepts, il est essentiel d'intégrer but, intention et désir dans le concept de schème lui-même.
De la même manière que les schèmes se composent et se décomposent hiérarchiquement , comme c'est le cas dans les exemples évoqués plus haut, le but se décline en sous-buts et anticipations. Prenons l'exemple du saut à la perche, qui illustre bien l'idée d'organisation séquentielle et simultanée de l'activité.
-organisation séquentielle ou diachronique: course, plantage de la perche et élévation, montée ultime et franchissement de la barre, retombée;
-organisation simultanée ou synchronique : gestes et mouvements coordonnés des différentes parties du corps, au moment du franchissement de la barre par exemple;
Les buts, sous-buts et anticipations précèdent et accompagnent le mouvement, et font l'objet de la part de l'athlète d'un contrôle quasi permanent pendant que l'action se déroule.

les règles d'action, de prise d'information et de contrôle.
C'est cette composante qui constitue la partie proprement générative du schème, celle qui engendre au fur et à mesure le décours temporel de l'activité. Les règles n'engendrent pas que l'action, mais toute l'activité, aussi bien les prises d'information et les contrôles que les actions matérielles elles-mêmes. L'approche de la cognition par les règles d'action, telle qu'elle a été proposée il y a 40 ans par Newell et Simon (1963) est donc insuffisante. En outre les règles n'engendrent pas seulement la conduite observable, mais toute une activité non directement observable, comme les inférences et la recherche en mémoire. Faute de reconnaître ces différentes fonctions des règles et des processus de régulation, beaucoup de chercheurs restent finalement proches du behaviorisme. C'est le concept d'invariant opératoire qui permet d'aller plus loin dans l'analyse, justement parce qu'il introduit la question de la conceptualisation.

les invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte.
Les invariants opératoires forment la partie la plus directement épistémique du schème, celle qui a pour fonction d'identifier et de reconnaître les objets, leurs propriétés, leurs relations, et leurs transformations. La fonction principale des invariants opératoires est de prélever et de sélectionner l'information pertinente et d'en inférer des conséquences utiles pour l'action, le contrôle et la prise d'information subséquente. C'est donc une fonction de conceptualisation et

d'inférence. Précisons que cette vision des choses s'écarte totalement d'un modèle de type « information puis action » : les schèmes gèrent en effet de manière entremêlée la suite des actions, des prises d'information et des contrôles nécessaires, L'efficacité se construit au fur et à mesure.
La fonction des « invariants opératoires » dans l'activité est la même, en principe, que celle du "système de catégories" que nous évoquerons dans le chapitre « représentation ». Mais la présente terminologie permet de ne pas préjuger du caractère explicite ou non, conscient ou non, des connaissances mises en œuvre.
Un point théorique important, qui sera évoqué plus loin à propos du concept de rapport scalaire, est qu'il ne faut pas confondre concepts-en-acte, et théorèmes-en-acte. Si la pensée est calcul, il faut bien qu'il existe dans son fonctionnement des éléments qui se prêtent à l'inférence, notamment aux anticipations et prédictions, et à la production des règles. Or les concepts, qu'ils soient objets ou prédicats, ne se prêtent pas à eux seuls à l'inférence parce qu'ils ne sont pas susceptibles de vérité ou de fausseté, mais seulement de pertinence ou de non-pertinence. Or les inférences vont du vrai au vrai, plus exactement de ce qu'on tient pour vrai à ce qu'il est raisonnable de tenir pour vrai. Une inférence est beaucoup plus qu'une association : le calcul associatif ne permet pas à lui seul de rendre compte du fonctionnement de la pensée. Les fonctions propositionnelles ne sont pas susceptibles de vérité ou de fausseté, puisqu'elles comportent des variables libres. Seules les propositions peuvent être vraies ou fausses. Il faut donc que des propositions tenues pour vraies fassent partie intégrante du système des connaissances évoquées ou évocables en situation, de manière que le sujet engage son activité et ses raisonnements.
Un théorème-en-acte est par définition, **une proposition tenue pour vraie dans l'activité**. L'étude du développement des compétences au cours de l'apprentissage ou au cours de l'expérience montre qu'un même concept peut, selon l'état de son élaboration, être associé à des théorèmes plus ou moins nombreux, plus ou moins riches, et éventuellement faux. Le cortège des théorèmes-en-acte susceptibles d'être associés au même concept est en général très grand, notamment dans les disciplines scientifiques et techniques, de telle sorte qu'il est souvent vide de sens de déclarer que tel sujet a compris tel concept; Il faudrait pouvoir préciser quels théorèmes-en-acte il est capable d'utiliser dans telle ou telle situation. Les inférences sont des relations entre propositions, et sont enchaînées par des métathéorèmes (ou théorèmes d'ordre supérieur) comme les syllogismes aristotéliciens, ou la transitivité des relations d'ordre : $a>b$ et $b>c \Rightarrow a>c$. On en verra un exemple plus loin chez les jeunes enfants.
La relation entre théorèmes et concepts est dialectique, en ce sens qu'il n'y a pas de théorème sans concepts et pas de concept sans théorème. Métaphoriquement on peut dire que les concepts-en-acte sont les briques avec lesquelles les théorèmes-en-acte sont fabriqués, mais que, réciproquement, la seule raison d'existence des concepts-en-acte est justement de permettre la formation de théorèmes-en-acte, à partir desquels sont rendues possibles l'organisation de l'activité et les inférences. Ainsi les théorèmes sont-ils constitutifs des concepts puisque, sans propositions tenues pour vraies, les concepts seraient vides de contenu. D'ailleurs un concept-en-acte est toujours associé à plusieurs théorèmes-en acte, dont l'émergence peut s'échelonner sur une certaine période de temps, éventuellement très longue, au cours de l'expérience et du développement.

4. Les inférences

Cette dernière composante du schème est indispensable à la théorie, justement parce que l'activité en situation n'est jamais automatique, mais au contraire régulée par des adaptations locales, des contrôles, des ajustements progressifs. Les inférences sont présentes dans toutes les activités en situation, parce qu'il n'arrive jamais qu'une action soit déclenchée par une

situation-stimulus, puis se déroule ensuite de manière totalement automatique, c'est-à-dire sans contrôle et sans prise nouvelle d'information. C’est possible en théorie, mais les observations montrent que cela ne peut concerner que des segments d'activité très petits, dont la fonctionnalité ne vient d’ailleurs pas d’eux seuls mais des schèmes dont ils sont partie intégrante.
Le caractère adaptable des schèmes est essentiel ; si on veut les représenter formellement, il faut faire appel à des règles conditionnelles de type SI... ALORS...
SI …telle variable de situation a telle valeur, et SI …telle autre variable de situation a telle valeur…ALORS …l’action X, la prise d’information Y, ou le contrôle Z doivent être effectués.
Bien évidemment cette formalisation est celle du théoricien, pas du sujet lui-même, sauf exception : pour lui les inférences et les règles restent presque toujours implicites, et même souvent inconscientes. Les règles d’action, de prise d’information et de contrôle sont la traduction pragmatique des théorèmes-en-acte : elles traduisent principalement le fait que les variables de situation peuvent en général prendre plusieurs valeurs, et que les sujets sont en mesure de s’adapter à ces différentes valeurs.
Sans ces quatre composantes du schème (but, règle, invariant, inférence), on ne peut pas comprendre pleinement la structure de l’activité, et sa double caractéristique d’être à la fois systématique et contingente :
-systématique parce que, dans beaucoup de situations, l’activité est assujettie à des règles univoques. C’est le cas notamment pour les algorithmes en mathématiques (les quatre opérations de l’arithmétique, la résolution de certaines catégories d’équations, la recherche du PGCD ou du PPCM de deux nombres entier), et pour les procédures imposées aux opérateurs dans certains postes de travail (pilotage d’avions, de systèmes dangereux comme les centrales nucléaires, fabrication de médicaments et de vaccins).
-contingente parce que les règles engendrent des activités et des conduites différentes selon les cas de figure qui peuvent se présenter, ainsi que nous venons de le voir. Cette contingence de l’activité, est encore plus éclatante pour les situations nouvelles, lorsque le sujet ne dispose pas de schème tout prêt dans son répertoire, et doit improviser les moyens de faire face. La contingence tourne alors à l’opportunisme, et le sujet fait feu de tout bois en puisant dans ses ressources cognitives, c’est à dire dans les schèmes antérieurement formés susceptibles d’ouvrir une voie à la recherche de la solution. L’exemple évoqué plus loin du placement de données numériques est démonstratif (chapitre 4).

Ainsi, grâce à l’articulation étroite de ses quatre composantes, le concept de schème apporte une réponse théorique que n’apporte aucun autre concept de psychologie cognitive. On voit aussi que, dans l’adaptation aux situations nouvelles (et donc dans la résolution de problème), une fonction essentielle est assurée par les invariants opératoires : soit qu’ils existent déjà dans les ressources du sujet, et qu’ils soient décombinés et recombinés, soit qu’ils n’existent pas encore, qu’ils émergent en situation, et viennent s’articuler avec les invariants antérieurement formés. La fonction de conceptualisation assurée par les invariants opératoires est donc cruciale pour comprendre que les schèmes sont le lieu psychologique central d’adaptation à la nouveauté, comme ils le sont de l’adaptation à la diversité.

CHAPITRE 2 Signifiants et signifiés, langagiers et non langagiers

Sans les mots pour les exprimer, et sans la communication entre humains, les concepts n'auraient pas toutes les caractéristiques fonctionnelles que nous leur prêtons : généralité, organisation en systèmes, mise à distance et objectivation, distinction entre objets et prédicats, entre différentes catégories de prédicats... Pour autant, cela ne doit pas nous conduire à confondre symbolisation et conceptualisation : il s'agit de processus distincts. L'objet de ce chapitre est justement de contribuer à une certaine clarification du rôle du langage et des autres systèmes de représentation symbolique dans la conceptualisation.
Commençons par définir ce que nous entendons par « conceptualisation » et par « symbolisation ». Nous avons besoin de définitions larges, de manière à pouvoir traiter la question des compétences et de la forme opératoire de la connaissance, aussi bien que celle de la forme prédicative de la connaissance.

La conceptualisation consiste dans l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, de leurs relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception relativement directe ou d'une construction.
Cette construction est individuelle ou collective : elle résulte toujours d'une histoire et de l'expérience.

La symbolisation consiste dans l'usage de signifiants matériels sonores ou visuels, langagiers ou non langagiers, pour communiquer. Il n'y a pas de communication sans signifiés, et donc sans une certaine forme de conceptualisation.
Les systèmes de signifiants/signifiés sont en général partagés par une communauté, grande ou petite ; mais ils peuvent être personnels. Ils jouent un rôle important dans la conceptualisation.

Il est important de définir sans ambiguïté ce qui est représenté par les signifiants. La tentation est grande de dire que ce sont des concepts : Vygotski n'échappait pas à cette tentation puisque, dans la première partie de « Pensée et Langage », il définissait le concept comme « la signification des mots ». Il faut justement se garder d'aller trop vite. Si les linguistes parlent de « signifiés », c'est entre autres raisons, parce que les signifiés de la langue ne sont pas tous, et pas nécessairement, de l'ordre du conceptuel. Certains signifiants sont d'abord des signaux : leur fonction est d'avertir autrui de certaines intentions ou de certains dangers. Même dans les énoncés proprement prédicatifs (dans lesquels il est dit quelque chose des relations et des propriétés des objets), la relation entre signifiés et signifiants n'est pas biunivoque : elle est d'ailleurs mal cernée par l'attention privilégiée accordée au lexique ; les signifiants sont aussi des énoncés et des textes, pas seulement des mots. Les grammaires d'énoncés et de textes font partie des signifiants. Les signifiants forment des systèmes et sous-systèmes ; les signifiés aussi ; de telle sorte qu'on peut énoncer le principe suivant, du nom de l'auteur qui l'a soutenu le premier.

Principe de SAUSSURE ou principe de correspondance systémique entre signifiants et signifiés.

L'idée de correspondance systémique peut être illustrée par un exemple simple, connu de tous les élèves qui ont appris ou qui apprennent l'anglais. Le sous-système de la langue anglaise qui permet d'exprimer les relations temporelles est composé des mots « since », « ago » et « for », et des temps des verbes : prétérite, passé simple, passé composé, forme progressive, sans qu'il soit possible de mettre ces mots et ces formes du verbe en relation terme à terme avec les ingrédients du sous-système correspondant de la langue française : prépositions, adverbes et temps du verbe.

Le fait que les relations entre deux langues comme l'anglais et le français ne soient pas biunivoques, implique que la correspondance signifiants/signifiés n'est pas elle même biunivoque, dans aucune des deux langues. Ceci peut paraître un inconvénient pour la communication, puisque les hommes et les femmes cherchent en général à s'exprimer de la manière la moins équivoque possible, en tous cas lorsqu'ils ont un message important ou grave à communiquer. Pourtant c'est aussi une qualité positive du langage et des langues que de permettre, par glissement de sens et métaphore, de dire des choses avec des mots et des expressions dont la signification conventionnelle est autre. Cette propriété du langage et de la langue n'est pas propre à la poésie ou à la littérature. Nous en verrons des exemples plus loin en mathématiques, à l'occasion de l'analyse des structures additives notamment.

Faisant écho à l'idée de Condillac que la science serait « une langue bien faite », l'école philosophique du positivisme logique a tenté de présenter la science comme un ensemble d'énoncés découlant nécessairement des observables. Si cette tentative est vouée à l'échec, ce n'est pas en raison de difficultés imprévues, mais parce qu'il est dans la nature du langage d'être partiellement équivoque : les mots et les énoncés ont en général plusieurs sens, a fortiori s'il s'agit d'énoncer des phénomènes et des concepts nouveaux. C'est en fait une condition de son évolution et de son enrichissement. La démonstration de cette pluralité de sens des mots, des énoncés et des textes a été faite abondamment par la linguistique pragmatique, avec l'analyse des conversations ordinaires ; mais cela est vrai aussi, quoique à un moindre degré, pour les échanges verbaux entre professionnels ou entre scientifiques, a fortiori entre un enseignant et ses élèves.

La science n'est pas et ne peut pas être seulement et totalement une langue bien faite. La communication ne peut pas être lavée de toute équivoque et de tout malentendu, même lorsqu'il s'agit de rationalité. C'est donc une question théorique essentielle que d'identifier les sources de la conceptualisation qui ne sont pas réductibles aux relations signifiés/signifiants, et il nous faut nous interroger sur la place d'autres composantes de la représentation dans les processus de conceptualisation. La solution est à rechercher dans un quaterne théorique combinant les relations entre plusieurs instances : réel, invariants opératoires, signifiés, signifiants, quaterne dans lequel les invariants opératoires sont en rapport avec le réel, tandis que les signifiés sont en rapport avec les signifiants ; le point le plus délicat est inévitablement celui des rapports entre invariants opératoires et signifiés. Ces rapports posent le problème de l'énonciation dans un sens, de l'interprétation des énoncés dans l'autre.

Or ce qui est vrai des rapports entre signifiants et signifiés dans la langue est vrai aussi des rapports entre situations et schèmes dans l'activité. Il n'y a pas davantage de correspondance biunivoque entre réel et propositions tenues pour vraies dans l'activité (les théorèmes-en-acte), qu'il n'y en a entre réel et énoncés explicites de la science.
Cela n'empêche pas pour autant schèmes et énoncés d'être les deux formes essentielles de la manifestation des connaissances. On peut les désigner comme la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance ; de la même connaissance, celle du réel, et non pas de deux

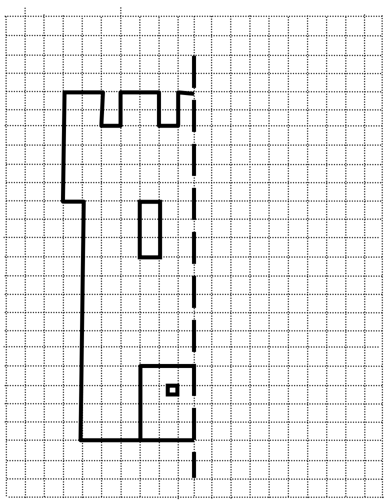
formes étrangères l'une à l'autre, et qualifiées parfois de « procédurale » et « déclarative ». En effet la conceptualisation du réel existe dans les deux formes de la connaissance, même si elle ne s'exprime pas de la même manière : par l'organisation de l'activité dans le premier cas , par l'énonciation dans le second cas. Nous verrons d'ailleurs plus loin qu'il y a de l'opératoire dans l'énonciation et le dialogue, et du prédicatif dans l'opératoire.

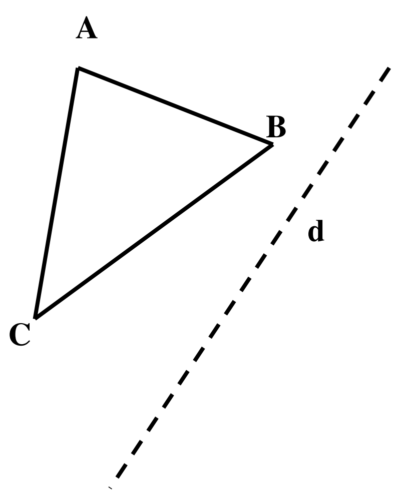
Pour illustrer la distinction entre forme opératoire et forme prédicative, il faut un exemple simple et concret des deux complexités à l'œuvre au cours du développement de ces deux formes de la connaissance.

Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

La forme opératoire de la connaissance est celle qui permet d'agir en situation (et de réussir éventuellement) ; elle est faite de schèmes. La forme prédicative est celle qui énonce les objets de pensée, leurs propriétés, leurs relations et leurs transformations. La science est faite de textes, donc d'énoncés ; c'est là une dimension essentielle de la connaissance ; mais ces textes ne rendent qu'imparfaitement compte de la connaissance opératoire mise en oeuvre en situation.
Prenons l'exemple des deux situations ci-après, qui concernent toutes deux la symétrie orthogonale. Dans la première situation, qui peut être présentée à des enfants de 8 ou 9 ans, il s'agit de compléter la forteresse en dessinant à droite la partie symétrique de la demi-forteresse déjà dessinée. Les habiletés manuelles nécessaires ne sont pas négligeables : avec le crayon, partir du bon point, s'arrêter au bon point, dessiner le trait exactement au-dessus du trait du quadrillage …Mais les connaissances proprement géométriques ne sont pas trop complexes, puisque tous les angles sont droits et que le quadrillage facilite grandement l'organisation de l'activité de l'élève : un pas à gauche sur la figure de droite, un pas à droite sur la figure de gauche ; deux pas en descendant sur la figure de gauche, deux pas en descendant sur celle de droite etc.
Dans la seconde situation, qui ne peut guère concerner les élèves avant l'âge de 12 ou 13 ans, le problème est beaucoup plus difficile puisqu'il faut utiliser les instruments de la géométrie, soit l'équerre graduée, soit la règle et le compas (dont les propriétés utilisables ici sont encore plus complexes que celles de l'équerre). La tâche « tracer le symétrique de… » peut donc présenter des difficultés contrastées en fonction de la figure et des instruments disponibles. Ainsi la forme opératoire de la connaissance se décline à des niveaux de développement très différents, en fonction notamment des connaissances nécessaires à l'action et à l'utilisation des instruments (axe de symétrie, propriétés des points homologues etc).

.





Mais on peut en dire autant pour la forme prédicative de la connaissance. Voici quatre énoncés relatifs au champ conceptuel de la symétrie :

1 La forteresse est symétrique
2 Le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d
3 La symétrie conserve les longueurs et les angles
4 La symétrie est une isométrie

Dans les deux premiers énoncés, le concept de symétrie fonctionne comme un prédicat : à une place dans le premier énoncé, à trois places dans le second. Dans le troisième énoncé, ce qui était prédicat est devenu objet : la symétrie. En outre ce nouvel objet de pensée à son tour a des propriétés : la conservation des longueurs et des angles. Enfin le quatrième énoncé exprime une relation d'inclusion entre deux ensembles : les symétries et les isométries ; le prédicat relatif à la conservation des longueurs et des angles du troisième énoncé est devenu un objet de pensée à son tour, l'isométrie. On voit ainsi que les concepts se construisent en s'appuyant les uns sur les autres, et que le langage permet, mieux que tout autre processus, l'identification des objets ne correspondant directement à aucune perception : symétrie et isométrie sont des constructions conceptuelles. A l'appui du point de vue de Vygotski , on peut dire que la médiation par le langage est un processus incontournable dans l'enseignement des sciences. Le commentaire de l'enseignant est irremplaçable. Mais cela ne signifie pas que son rôle consiste seulement et principalement à mettre en mots le contenu conceptuel des connaissances ; la fonction de l'enseignant est aussi de choisir et de mettre en scène les situations le plus propices à engager les élèves dans l'activité, en fonction de leur développement. C'est même premier dans les pédagogies actives.

Place du langage dans l'activité

Il existe des relations dialectiques entre prédicatif et opératoire.

Un premier point est que le langage a une fonction dans l'organisation de l'activité, au moins de certaines activités. La planification et l'accompagnement de l'action par le langage est un premier exemple : il suffit de s'observer soi-même lorsqu'il faut accomplir successivement plusieurs opérations, comme dans l'exécution d'une recette de cuisine ou le rangement d'un ensemble d'objets, pour se surprendre à parler à voix haute, ou à murmurer. Souvent, chez l'adulte, cette activité de parole reste intérieure, et l'on sait que Vygotski avait fait de ce langage pour soi (égocentrique à certains égards) une étape dans le processus de développement des enfants : l'intériorisation de certaines formes de dialogue. Il apportait ainsi au langage dit « égocentrique » étudié par Piaget une interprétation différente de celle avancée par le psychologue genevois.

Un second point important, bien mis en évidence par les chercheurs en linguistique pragmatique, est le fait que parler c'est agir sur autrui et donc sur l'activité des partenaires. Cela ne concerne pas que l'intervention directe, faite d'ordres ou de commentaires en situation au cours de l'activité à plusieurs, mais aussi des formes subtiles d'énonciation qui, par leurs présupposés, permettent à autrui de comprendre ce qui lui est demandé. Alain Trognon avait donné un jour un exemple superbe : il allait rentrer à son domicile après un colloque en Russie, et il évoquait la fin du dîner avec sa femme. Celle-ci lui disait alors : « la vaisselle est sur l'évier ». Que lui disait-elle en réalité ? Non pas que la vaisselle était sur l'évier (pas seulement en tous cas), mais surtout que c'était à lui de faire la vaisselle.

Dans une phase dite « d'institutionnalisation » (Brousseau), lorsqu'un enseignant formule ce qu'il faut retenir d'une leçon au cours de laquelle les élèves ont été actifs et ont constaté certains phénomènes (sans avoir pourtant été en mesure de les énoncer de manière claire), il agit sur les conceptions des élèves et modifie ainsi leurs conceptions antérieures, implicites ou explicites.

Un troisième point concerne le poids de l'activité langagière dans le contenu conceptuel de l'activité. Dans le dénombrement, par exemple, l'énonciation de la suite des mots-nombres n'est pas seulement l'un des registres impliqués par l'activité, en même temps que les gestes du regard et le pointage des objets avec le bras et le doigt ; c'est aussi le moyen de contrôler le bon déroulement du dénombrement et d'exprimer le cardinal de l'ensemble. La forme parlée exprime donc à la fois le déroulement de l'activité et son résultat. Sans la contribution de l'activité langagière, il n'y aurait pas de schème du dénombrement.

D'une manière analogue mais conceptuellement plus complexe, la résolution d'une équation algébrique ou d'un système d'équations est facilitée par la transformation des expressions d'une ligne à l'autre. En effet, les opérations sur les signifiants algébriques sont une partie non négligeable de l'activité (en liaison partielle avec le raisonnement sur les signifiés). La suite des écritures est à la fois un moyen de contrôle et un résultat de l'activité. Elle est essentielle dans le fonctionnement du script-algorithme de résolution des équations. Les symboles algébriques forment un système qui n'est pas proprement langagier, même s'ils ont leur source dans certaines formes langagières, mais ils ont cette propriété de représenter des objets et des prédicats.
La question des rapports signifiants-signifiés se pose pour plusieurs autres systèmes symboliques.

Dernier point : dans la conversation entre une maman et son bébé au cours de leur activité conjointe, le bébé ne comprend pas, ou guère, les paroles de sa maman (en tout cas au début), et c'est pourtant ainsi qu'il apprend à parler. Ce paradoxe mérite un détour théorique. La principale fonction cognitive du langage pour le bébé est probablement une fonction de référence aux objets et aux actions, et progressivement à leurs propriétés et relations. Cette fonction suppose qu'il existe déjà chez le bébé des moyens d'identifier ces objets, ces actions, et ces propriétés. En d'autres termes, le bébé doit nécessairement disposer de certains invariants opératoires pour pouvoir donner du sens aux paroles de sa maman. C'est la conceptualisation implicitement contenue dans son activité qui lui permet d'interpréter progressivement et de mieux en mieux les interventions verbales de sa maman.

D'où le principe :
Le concept d'invariant opératoire constitue le lien théorique indispensable entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance.

Nous aurons l'occasion, dans les chapitres ultérieurs, de nourrir cette réflexion sur les deux formes de connaissance que nous venons d'évoquer, ainsi que sur certaines conditions de leur efficacité. Il n'est pas superflu ici de rappeler à quel point Piaget et Vygotski ont pesé dans l'intérêt scientifique accordé à ces deux formes de la connaissance. Piaget est considéré comme le père principal de la théorie dite « opératoire » ; cela ne l'empêchait pas de s'intéresser à « la formation du symbole » (c'est le titre d'un de ses ouvrages). Vygotski considérait que « le concept, c'est la signification des mots » (il le déclare à plusieurs reprises dans *Pensée et langage*), mais il était en même temps, avec Leontiev et Luria d'une part, Rubinstein d'autre part, un protagoniste actif des théories soviétiques de l'activité.

Pour tirer une conclusion provisoire, j'avancerai la thèse que ces deux formes de la connaissance sont des composantes essentielles de l'activité de représentation, à côté d'autres composantes que nous verrons plus tard. La représentation est un concept central de la psychologie. Retenons pour l'instant que le sens de « représentation calculable » est double, puisque les « calculs » peuvent être opérés sans le secours de signifiants dans certaines formes d'activité n'impliquant que peu de langage, et que d'autre « calculs » ne peuvent se dérouler efficacement sans le secours de systèmes symboliques. L'histoire de la culture ne se réduit pas à l'élaboration de tels systèmes, mais il faut reconnaître qu'ils pèsent d'un grand poids aujourd'hui, notamment en raison du développement des langages dits « artificiels », qui ne partagent pas toutes les fonctions du langage naturel, mais qui ont certaines de ses propriétés. Est particulièrement importante la dissociation, dans le fonctionnement des machines, des deux instances que sont le signifié et le signifiant. Les hommes ne peuvent pas se passer du signifié dans leurs « calculs », les machines oui.

Chapitre 3 les structures additives

Il n'y a pas de science possible sans le choix d'unités d'étude. Dans le premier chapitre nous avons distingué et défini deux sortes d'unités d'étude, complémentaires l'une de l'autre : *schème* et *classe de situations*. Nous allons en définir une troisième, celle de *champ conceptuel*. Schème et classe de situations sont des unités associées à l'idée d'activité : elles ont pour but de permettre une certaine opérationnalisation des recherches empiriques, en circonscrivant les descriptions et les analyses susceptibles d'être entreprises.
L'unité d'étude « champ conceptuel », elle, est associée à l'idée de développement : en effet les processus de conceptualisation, en particulier ceux qui interviennent au cours des apprentissages scolaires, relèvent du développement à long terme, et ne mettent pas en jeu un seul type de situations, ni une seule forme d'organisation de l'activité. Un concept se forme à travers une certaine variété de situations, de structure différente, et une situation ne s'analyse pas avec un seul concept mais plusieurs. En d'autres termes il est vain d'espérer comprendre la formation d'un concept isolé, ou de dégager la structure conceptuelle d'une situation étroitement circonscrite, sans étudier en même temps différentes situations et différents concepts. D'où la définition :

Un champ conceptuel est à la fois un ensemble de situations et un ensemble de concepts : les situations qui contribuent à donner du sens à ces concepts, et les concepts qui permettent de comprendre les tenants et aboutissants de ces situations. Par voie de conséquence un champ conceptuel est aussi **un ensemble de schèmes**. Voici un premier exemple :

Les structures additives

Dans quelles situations, les enfants rencontrent-ils les premières occasions de faire une addition ou une soustraction et de réussir? Par quelle sorte de situations cela commence-t-il ? quelles autres situations rencontrent-ils ensuite ? Sur quelles difficultés butent-ils, durables ou éphémères ? Quels schèmes peut-on identifier ? quelles conceptualisations ? Et quelles formes symboliques ?

Si le principe de Piaget est vrai, que la connaissance est adaptation, et si l'idée Vygotskienne de zone de proche développement est pertinente, il est intéressant de rechercher les filiations et les ruptures entre situations et entre schèmes. De nombreuses recherches ont été menées dans le monde sur la difficulté relative des situations d'addition et de soustraction. Je me contenterai ici d'aller aux idées à retenir dans un ouvrage sur les principes.

J'appelle « **situation prototypique** » une situation maîtrisée avant les autres par les enfants, et qui fournit le sens premier de l'opération envisagée. C'est justement ce sens premier qui devra se transformer et s'enrichir dans la rencontre avec des situations de structure différente.

Il existe deux situations prototypiques pour l'addition :la réunion de deux parties en un tout, et l'augmentation d'une quantité initiale :

Réunion :
Il y a 3 filles et 4 garçons pour l'anniversaire de Paul ; Combien d'enfants en tout ?

Yann a 3 billes rouge et 4 billes vertes ; Combien de billes en tout ?

Augmentation d'une quantité initiale
Pierre a 3 billes ; il en gagne 4 ; combien en a-t-il maintenant ?

Il existe une seule situation prototypique pour la soustraction : la diminution d'une quantité initiale.
Gilles a 5 billes, il en perd 2 ; combien en a-t-il maintenant ?
Charlotte a 5 euros; elle en dépense 2 pour acheter un gâteau ; combien lui reste-t-il ?

On pourrait penser que, dans le cas de la réunion, la recherche d'une partie connaissant le tout et l'autre partie serait aussi une situation prototypique de la soustraction. Il n'en est rien, comme en attestent les études empiriques sur les jeunes enfants. Compléter la partie connue par rapport au tout est une opération dérivée, qui repose sur un raisonnement : séparer du tout la partie connue, donc diminuer le tout ; et se rapprocher ainsi de la situation de diminution. C'est un glissement de sens et un pas dans la maîtrise des situations de soustraction non prototypiques. Il y en a plusieurs autres, que nous verrons plus loin.

Poursuivons l'analyse autrement, relation après relation ;
Il n'y a que deux classes de problèmes pour l'union de deux parties en un tout : la recherche du tout connaissant les deux parties, la recherche d'une partie connaissant le tout et l'une des parties.
Dans le cas de la transformation d'un état initial en un état final, on identifie six classes de problèmes : la recherche de l'état final connaissant l'état initial et la transformation (augmentation ou diminution), la recherche de la transformation connaissant l'état initial et l'état final (le second étant plus grand ou plus petit que le premier), la recherche de l'état initial connaissant l'état final et la transformation (augmentation ou diminution). Au total deux de ces problèmes demandent une addition, quatre une soustraction, en dépit de l'apparente symétrie de l'ensemble des six situations. En outre si la recherche de l'état final est prototypique pour l'addition et pour la soustraction, les situations de recherche de l'état initial sont plus difficiles, et ne sont réussies par la plupart des élèves qu'avec un décalage d'environ deux ans par rapport à la recherche de l'état final: le théorème-en-acte nécessaire au choix de l'opération pertinente demande en effet l'inversion de la transformation directe et son application à l'état final.

$$F = T(I) \longrightarrow I = T^{-1}(F)$$

Si la transformation T fait passer de l'état initial I à l'état final F, alors c'est la transformation réciproque T^{-1} qui fait passer de l'état final à l'état initial.

Les élèves ne peuvent évidemment pas formuler leur raisonnement dans ces termes ; ni même en utilisant leurs propres mots. Mais le choix qu'ils font de l'opération pertinente et des données pertinentes montre que ce théorème fonctionne en acte, chez les enfants, à partir de la seconde et de la troisième année de l'école élémentaire.

Faisons quelques pas de plus :
Les relations de comparaison fournissent aussi de nombreuses occasions de raisonnement et de calcul pour les élèves de l'école élémentaire :
Bruno a 5 ans de plus que sa sœur Anne. Anne a 3 ans Quel âge Bruno a-t-il ?
Emmanuelle a 3 ans de moins que son amie Brigitte. Elle a 5 ans. Que âge Brigitte a-t-elle ?

Marie a 7 ans ; Benoît a 4 ans ; Combien d'années Benoît a-t-il de moins que Marie ?

A nouveau il y a six cas de figure du point de vue des relations entre les différentes situations de comparaison et l'opération arithmétique nécessaire pour les traiter. On peut décomposer chaque énoncé en trois éléments: la relation, le référé, le référent. Dans le problème Bruno, il faut trouver le référé ; dans le problème Emmanuelle il faut trouver le référent ; et dans le problème Marie, il faut trouver la relation, ou plutôt une forme de la relation, puisqu'on aurait pu aussi poser la question sous la forme « *Combien d'années Marie a-t-elle de plus que Benoît ?*

D' autres possibilités méritent d'être étudiées, qui enrichissent le tableau des structures additives, y compris des cas demandant une seule opération : la combinaison et la décombinaison de transformations, la combinaison et la décombinaison de relations, la transformation de relations. Les possibilités paraissent quasiment infinies, surtout si on pense en outre à la variété des domaines de la vie courante et des apprentissages scolaires susceptibles d'être évoqués, et aux différentes catégories de nombres utilisables comme données : petits nombres entiers, grands nombres entiers, décimaux, fractions. On pourrait considérer que cela relève de la pure combinatoire; et il est vrai que la multiplication des cas de figure ne présente guère d'intérêt. Il faut s'intéresser en priorité aux questions cruciales de conceptualisation, celles qui font la différence au cours du développement. Par exemple on ne peut pas négliger le fait que les transformations et les relations sont représentables par des nombres relatifs (positifs et négatifs), alors que les quantités envisagées plus haut pour la relation partie/tout, et pour les états initial et final sont représentables par des nombres naturels. Il n'est pas trivial d'étendre à des nombres relatifs des opérations de pensée formées dans la rencontre avec des nombres naturels, même lorsque aucun symbole n'indique le caractère positif ou négatif des données numériques.
L'exemple suivant peut convaincre le lecteur : *Jean a joué deux parties de billes ; à la seconde partie il a perdu 7 billes mais il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie.*
En recomptant ses billes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagné 15 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?
Ce problème donne lieu à un échec massif (presque total en fait) à la fin de l'école élémentaire et au début de l'école secondaire. Si l'on remplace la dernière information « *il a gagné 15 billes en tout* » par l'information contraire « *il a perdu 15 billes en tout* », le problème est résolu par la majorité des élèves. Pourquoi cette différence ?
Dans le premier cas les deux informations « *perdu 7 billes à la seconde partie* » et « *gagné 15 billes en tout* » sont de signes contraires et il faut donc ajouter les 7 billes perdues à la seconde partie aux 15 billes gagnées en tout pour trouver les 22 billes gagnées à la première partie. Cette opération est contre intuitive pour les élèves.
Par contre dans le second cas, les 7 billes perdues à la seconde partie peuvent être soustraites des 15 billes perdues en tout, par un simple glissement de sens qui permet de traiter la réunion de deux transformations de même signe (négatives ici) comme la réunion de deux ensembles.
Ainsi l'extension des opérations d'addition et de soustraction aux transformations et aux relations se heurte à des obstacles épistémologiques. C'est un obstacle que doivent vaincre les élèves pour comprendre l'algèbre des nombres relatifs, comme d'ailleurs les mathématiciens, ont dû surmonter leur conception initiale du nombre comme mesure, donc positive, pour accepter que les nombres négatifs soient aussi des nombres,.

Prenons le théorème élémentaire d'algèbre

$$x + a = b \longrightarrow x = b - a$$

Passer de l'arithmétique à l'algèbre ne soulève pas trop d'obstacles dans le cas où a et b sont positifs et où la somme b est plus grande que la partie a ; c'est déjà plus difficile lorsque b est plus petit que a, et franchement contre intuitif lorsque b et a sont de signes contraires.

Dans les structures additives on doit considérer bien évidemment des cas un peu différents de ceux évoqués ici, comme le déplacement d'une position spatiale ou temporelle, ou comme les algèbres associées aux abscisses et aux vecteurs. Je ne les évoquerai pas ici, parce que le but de ce chapitre est de montrer la nécessité de considérer des champs conceptuels dès l'école élémentaire. Cela permet de nourrir la « zone de proche développement » de Vygotski avec des concepts et des situations en bonne et due forme, et pas seulement avec l'idée un peu courte que l'enfant peut alors « faire avec l'aide de l'adulte ce qu'il n'est pas encore capable de faire tout seul ».
Parmi les aides apportées par l'adulte, figurent justement les représentations symboliques.

Quelles représentations symboliques ?

Pour montrer le poids des catégories non strictement numériques dans la conceptualisation de l'arithmétique élémentaire, intéressons-nous d'abord aux marques temporelles susceptibles de donner leur structure aux énoncés de problèmes d'addition et de soustraction. Puis proposons quelques commentaires concernant différentes représentations symboliques susceptibles d'être utilisées par les enseignants pour aider les enfants à se représenter les relations en jeu et à faire le choix des bonnes opérations. Et intéressons-nous à leur inégale pertinence.

Les marques linguistiques de la temporalité

Voici deux problèmes, qui demandent la même opération numérique 7+5 ou 5+7, et qui sont cependant réussis par les élèves avec des décalages importants, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut. Le premier est réussi par tous ou presque tous les élèves à la fin du cours préparatoire (7 ans) ; le second avec un décalage de près de deux ans en moyenne (vers 9 ans).

Pierre avait 7 billes ce matin avant de jouer. Il en gagne 5 à la récréation. Combien en a-t-il maintenant ?

Robert vient de perdre 5 billes. Il en a maintenant 7. Combien en avait-il ce matin avant de jouer ?

Les marques linguistiques de la temporalité sont ici de trois sortes: l'ordre d'énonciation, le temps des verbes, le lexique des conditions temporelles. Manipulons ces marques pour prendre conscience de l'inégale intelligibilité des deux énoncés

Pierre avait 7 billes ce matin. Il en gagne 5 à la récréation. Combien en a-t-il maintenant?

L'ordre d'énonciation est le même que celui des états et des actions
Le temps des verbes est : imparfait / présent / présent
Le lexique utilisé : ce matin / à la récréation / maintenant

Si on supprime les marques lexicales, on obtient l'énoncé suivant :

Pierre avait 7 billes.

Il en gagne 5.
Combien en a-t-il ?

Si on modifie l'ordre d'énonciation, on obtient l'énoncé suivant :
A la récréation Pierre gagne 5 billes.
Combien en a-t-il maintenant ?
Il avait 7 billes ce matin.

Si on met tous les verbes au présent et qu'on supprime les marques lexicales, on obtient l'énoncé suivant :
Pierre a 7 billes.
Il en gagne 5.
Combien en a-t-il ?

Ces différentes modifications rendent l'énoncé un peu plus délicat à comprendre (surtout le dernier), mais il demeure intelligible. Cela tient au fait que la langue est redondante et qu'elle utilise plusieurs marques pour signifier la même chose.
L'ordre d'énonciation conforme au déroulement suffit pratiquement à la compréhension de l'énoncé.

Considérons maintenant le 2ème problème:

Robert vient de perdre 5 billes. Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer?

L'énonciation est conforme au déroulement de l'action sauf en ce qui concerne la question sur l'état initial, placée à la fin.
Le temps des verbes est : présent / imparfait / passé proche (vient de)
Le lexique utilisé : à la récréation / maintenant / avant

Si on supprime les marques lexicales, on obtient l'énoncé suivant :
Robert vient de perdre 5 billes.
Il en a 7.
Combien en avait-il ?

Si on modifie l'ordre d'énonciation, on obtient par exemple l'énoncé suivant :
Robert a maintenant 7 billes.
Combien avait-il de billes avant de jouer ?
Il vient de perdre 5 billes.

Si on met tous les verbes au présent et qu'on supprime les marques lexicales, on obtient l'énoncé suivant :
Robert perd 5 billes.
Il en a 7.
Combien en a-t-il ?

Les énoncés deviennent incompréhensibles. Notamment l'ordre d'énonciation ne suffit plus.

Il serait intéressant de faire des recherches sur les énoncés d'arithmétique dans différentes langues, y compris en langue des signes, pour apprécier les redondances, et les effets de la suppression de certaines marques linguistiques.

Quelles formes symboliques ?

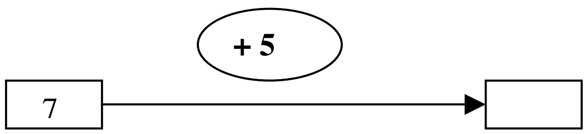
Les enseignants n'utilisent pas seulement les mots du langage courant, mais aussi des systèmes de signifiants comme l'algèbre, les schémas, les diagrammes, les tableaux, les graphiques…En général ils utilisent les deux à la fois, en raison d'une part du caractère économique et synthétique des schémas, tableaux et algèbres, d'autre part de la nécessité de commenter ce que représentent ces signifiants en même temps qu'on les utilise : le langage naturel est le métalangage des autres systèmes de signifiants**.**

La position métacognitive, ici, fait retour sur les objets de pensée en jeu, de manière à les analyser et à les organiser en système. Les concepts d'addition et de soustraction ne sont nullement suffisants. Il faut parler d'état et de transformation comme cela a été fait plus haut, de transformation directe et de transformation réciproque : réciproque et directe sont dans un rapport plus général que diminution et augmentation, mais le choix des opérations numériques découle du raisonnement sur les relations et les transformations. On doit aussi reconnaître la différence fondamentale entre une mesure, toujours positive, comme le nombre de billes dont on dispose à un moment donné, et une transformation, qui peut être, soit positive s'il s'agit d'un gain, soit négative s'il s'agit d'une perte.

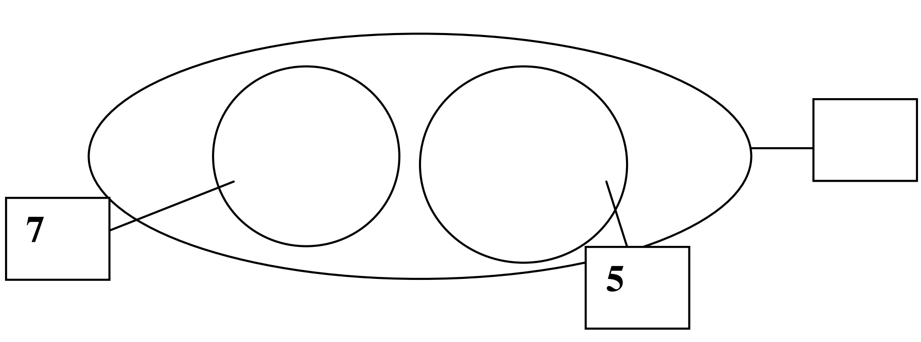
Les mots existent dans la langue naturelle pour désigner ces concepts, mais il est intéressant d'aller un peu au-delà du langage naturel et d'aborder certaines représentations symboliques couramment utilisées en mathématiques.

Comparons trois systèmes de représentation : celui des schémas fléchés, celui de l'algèbre, celui d'Euler-Venn (dit des « patates »).

Pour le problème « Pierre » les trois formes permettent de représenter le problème. Mais comme chacune représente à la fois le problème et l'opération pour le résoudre, on peut mettre en doute le bénéfice de la symbolisation.

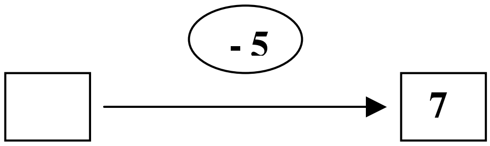


7 + 5 = **ou encore** **7 + 5 = x**



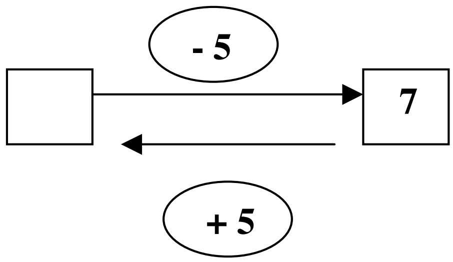
Pour le problème « Robert » les choses se gâtent. le schéma sagittal fonctionne bien, l’algèbre aussi.

$\boxed{} - 5 = 7$ **ou encore** $x - 5 = 7$



Mais on ne peut pas utiliser le schéma d’Euler-Venn pour représenter le problème, pour cette raison que les transformations négatives ne peuvent pas être représentées par des régions de l’espace: une surface a toujours une mesure positive.

Les difficultés s’accroissent si maintenant on considère le passage de la représentation du problème à la représentation de la solution, critère important de la fonctionnalité d’un système de signifiants/signifiés : seul le schéma sagittal peut accompagner utilement le raisonnement de l’enfant.



En effet, l’algèbre suppose des opérations de pensée qui sont hors de la portée de l’enfant au début de l’école élémentaire : l’égalité et la solution sont conservées lorsqu’on ajoute un même nombre aux deux membres de l’équation, et les opérations –5 et +5 s’annulent :

$x-5 = 7$

$x-5 + 5 = 7 + 5$

$x = 7 + 5 = 12$

L’avantage des systèmes symboliques est justement d’accompagner et de soutenir le raisonnement en ne retenant des données que ce qui est pertinent pour la résolution. La symbolisation apporte ainsi une contribution importante aux processus de conceptualisation. Celle-ci repose donc à la fois sur l’activité en situation, sur le langage ordinaire de la communication, et sur des symbolisations spécifiques.

Les structures additives sont réputées élémentaires, mais les concepts qu’elles impliquent résultent d'une construction : c'est le cas ici pour les concepts de nombre, de grandeur, d’état, de transformation, de comparaison quantifiée…

Les signes jouent bien évidemment un rôle dans ce processus, mais l'activité en situation est encore plus fondamentale : pour preuve certains concepts utilisés dans l'action demeurent implicites, et n'en sont pas moins opératoires. Le développement conceptuel des structures additives se mesure en années, voire en dizaines d'années.

Au-delà de l'école élémentaire

L'exemple a été donné plus haut de la difficulté rencontrée par les élèves jusqu'au collège pour décomposer une transformation en deux transformations de signes contraires : *un gain de 15 billes en tout doit être décomposé en une perte de 7 billes à la seconde partie et une première partie inconnue, qu'il faut justement calculer*.
Cette difficulté n'est pas réservée aux parties de billes, et Patrick Marthe, dans sa thèse, avait mis en évidence une difficulté comparable, jusque chez les élèves de 3ème et de seconde, pour la décomposition d'un parcours en aval le long de la Loire en deux parcours de sens contraire, un parcours en amont connu et un autre parcours inconnu.
C'est l'analyse des difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la comptabilité qui permet le mieux de prendre conscience du caractère durable des difficultés conceptuelles associées aux structures additives. Contentons-nous d'un exemple, celui du passif d'un bilan de fin d'exercice : en effet se trouvent placés au passif du bilan des sommes qu'aucune conception ordinaire ne prédispose à se retrouver ensemble en position d'être ajoutées les unes aux autres : le capital, les bénéfices de l'exercice, les amortissements, les provisions. La raison réside dans la cohérence du système comptable, cohérence fondamentalement algébrique, justement parce que le système comptable est le moyen de traiter les mouvements financiers de sens différent et les relations réciproques les unes des autres.
Il n'est pas rare que des étudiants de grandes écoles de commerce et de gestion, butent sur ces obstacles.

Parmi les schèmes de raisonnement susceptibles de faire obstacle à un raisonnement juste concernant gains et pertes, on peut citer le schème de traitement séquentiel de l'information.

Voici un exemple qui peut être présenté au cours d'une soirée entre amis, et qui permet de piéger certains d'entre eux *: Mr Smith achète un cheval 300 dollars, il le revend 400 dollars. Il rachète le même cheval 500 dollars, et le revend 600 dollars. A-t-il fait un bénéfice ou une perte ? Et de combien ?*
D'abord l'expérience mérite d'être faite, ne serait-ce que pour prendre conscience de la variété des réponses. L'analyse des raisonnements différents utilisés met en évidence des schèmes intéressants : les bons schèmes de raisonnement se heurtent notamment à un autre schème, le schème séquentiel de raisonnement, qui conduit à retenir les informations dans leur succession et à les composer immédiatement (gagné 100, perdu 100, gagné 100 ; réponse gagné 100).

- La bonne réponse (gagné 200) surprend ainsi une partie des sujets, qui se refusent à ne pas tenir compte de l'opération qui consiste à racheter 500 dollars un cheval qu'on a vendu 400 ;
- d'autres sujets se débarrassent du problème en déclarant que Mr Smith n'a ni perdu, ni gagné ;
- d'autres vont plus loin encore et considèrent qu'il a perdu de l'argent .

L'explication du bon raisonnement (les deux opérations d'achat et de vente sont indépendantes et Mr Smith a donc gagné 100 dollars à chaque fois, soit 200 dollars en tout) conduit beaucoup de sujets à demander des « preuves » : par exemple en faisant l'hypothèse d'une certaine fortune initiale de Mr Smith (1000 dollars, moins 300, plus 400, moins 500, plus 600), ou encore en comparant les dépenses (300 plus 500) et les ventes (400 plus 600).

Le bon raisonnement se heurte également à la difficulté conceptuelle de la non-indépendance de la négociation intermédiaire (vente 400, rachat 500). C'est en effet la perte de 100 dollars qui trouble fondamentalement les raisonnements : *si Mr Smith est trop bête pour racheter le cheval plus cher qu'il ne l'a vendu, il faut bien que ce soit pris en compte dans le raisonnement* ; or justement, il faut se méfier de cette appréciation parce que la bonne sélection de l'information concerne les deux opérations indépendantes que sont la première (*acheté 300, vendu 400*) et la dernière (*acheté 500, vendu 600).* L'opération *vendu 400, racheté 500* utilise des informations déjà utilisées dans les deux autres, et n'en est donc pas indépendante.

Cette question de l'indépendance est cruciale pour la compréhension des probabilités et des statistiques. Elle a été l'occasion de raisonnements faux depuis l'invention des probabilités au $17^{\text{ème}}$ siècle. L'exemple que nos venons de donner montre que cela concerne déjà les raisonnements d'arithmétique.

Ainsi les structures additives forment un champ conceptuel important, plus complexe qu'il n'y parait : elles couvrent des activités de la vie ordinaire et des activités techniques et scientifiques, des relations élémentaires et des relations algébriques ou quasi-algébriques d'une certaine complexité. Elles sont l'occasion de pièges pour le raisonnement, et ont mis quelques siècles, depuis la Renaissance, pour être pensées comme un système débarrassé des fausses intuitions, et muni d'opérations étendues aux transformations et relations de signes contraires.

Chapitre 4 **Autres exemples de champs conceptuels**

La problématique des champs conceptuels est née au cours de recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, comme en témoigne le chapitre précédent. Mais on peut la trouver féconde aussi pour d'autres disciplines, ou pour des domaines relevant de la vie professionnelle et de l'expérience générale de la vie, même si ces domaines ne font pas l'objet d'un enseignement organisé. Les travaux ne sont pas nombreux susceptibles d'être cités comme illustrations. Ceux qui sont retenus ci-après le sont pour leur diversité thématique. Le critère le plus important serait de pouvoir montrer l'intérêt de la double approche, par les situations et les schèmes d'une part, par le réseau des concepts d'autre part. C'est relativement exceptionnel.

La morale à l'adolescence

L'exemple qui suit est tiré directement de la thèse de Maria Pagoni. Celle-ci s'appuie sur les deux considérations principales suivantes :
- Les concepts moraux sont des produits de l'expérience sociale ; ils se construisent en situation, dans des communautés d'une relative diversité : familles, quartiers, groupes d'âge, religions…
- Ils résultent aussi d'opérations discursives, tant il est vrai que la communication et la discussion contribuent de manière importante à la conceptualisation des concepts moraux.

L'originalité de Maria Pagoni a consisté à proposer à une trentaine de groupes d'adolescents de 12 à 18 ans (de trois adolescents chacun), de fournir après discussion six règles de conduite qu'ils considéraient comme les plus importantes pour les relations humaines, de les hiérarchiser, et de justifier cette hiérarchisation. Les relations qui unissent les concepts entre eux dans les échanges, sont traitées comme des invariants cognitivo-discursifs, pouvant présenter différents degrés de complexité, et formant des systèmes. Les énoncés prononcés sont considérés comme des propositions « tenues pour vraies », que Maria Pagoni appelle des « thèses ». Dans une *thèse*, elle distingue le *terme posé* (ou *thème*) et les *termes constitutifs,* reliés par une opération prédicative. Au-delà des mots utilisés, elle identifie, à la suite de Grize des *classes-objets*, qui sont à proprement parler des entités catégorielles : par exemple « être sincère », dire la vérité », « ne pas mentir », « sincérité » sont des représentants de la même classe-objet « sincérité ». Dans les échanges, le thème est pris comme objet d'analyse, tandis que les termes constitutifs ont une fonction de prédicat. Les opérations prédicatives, quant à elles, peuvent prendre diverses formes verbales : est, doit être, est lié à, cela signifie, de sorte que, si…alors…etc.
Les opérations prédicatives font apparaître certains enchaînements de relations :

- Prescriptions, justifications, conditions de validité ;
- Constatation de faits, de situations, responsabilité des acteurs, quels motifs ? Facteurs pragmatiques, conditions nécessaires, réfutations éventuelles ;
- Couplage de ces considérations avec des conditions avec des « définitions naturelles » simples (A signifie B, A entraîne B), puis définition opérationnelle (A est B) et intégration dans un système (A est la plus importante) ;

Ainsi, dans les échanges, les adolescents se réfèrent à des situations (comme exemples et contre-exemples), à des règles prescriptives, à des valeurs et concepts dûment formulés, à des conditions, de telle sorte que les opérations normatives, pragmatiques et conceptuelles sont entremêlées. Les plus jeunes produisent des discussions orientées majoritairement par le prescriptif; les plus âgés par le conceptuel. Le pragmatique vient articuler ces deux orientations entre elles, et se présente, dans l'argumentation, comme la convocation des situations vécues et des conditions qui influencent le comportement moral.

Il s'agit bien d'un champ conceptuel, et cela n'aurait guère de sens d'en étudier séparément les différentes composantes : chacune dépend des autres. Une des conclusions notables de la recherche de Maria Pagoni est que l'intérêt porté par les adolescents aux conditions de validité des valeurs morales leur permet de passer d'une vision prescriptive des règles à une véritable conceptualisation des valeurs ; de telle sorte que les processus de conceptualisation apparaissent comme la clé de l'autonomie et de la responsabilisation sociale et morale de l'individu.

Aux valeurs de justice mises en avant par Piaget et Kohlberg après Durkheim, le souci d'autrui et l'amour avaient été présentés par Gilligan comme une source complémentaire importante des valeurs morales. Sur la base des dialogues recueillis auprès des adolescents, Maria Pagoni peut ajouter la sincérité. Au bout du compte, les données recueillies dans les dialogues et l'analyse statistique des liaisons discursives lui permet de distinguer :

- les valeurs intégratrices que sont sincérité, respect et amour ;
- les valeurs de base que sont d'une part l'amitié et la sollicitude (fidélité, discrétion, entraide, compréhension et communication) et d'autre part la justice (honnêteté, politesse, discussion, collaboration, égalité)

La réciprocité est le principe prépondérant pour la justice, mais les valeurs morales normatives tirent d'abord leur force des situations dans lesquelles la société (parents, grands-parents, religion, école, proverbes, littérature) expriment les règles prescriptives ; tandis que les situations qui servent de références au souci d'autrui et à l'amour sont plutôt celles vécues par l'enfant dans son entourage immédiat (famille, amis). Les sentiments l'emportent cette fois sur le raisonnement. La conceptualisation n'en est pas absente pour autant : par exemple l'amour, le respect et la sincérité forment trois valeurs ayant des parties communes deux à deux et une partie commune aux trois.

Ainsi la morale est-elle, comme les structures additives et comme la taille de la vigne, un domaine dans lequel l'organisation de l'activité est nourrie de concepts et de jugements, fussent-ils tantôt explicites, tantôt implicites, voire inconscients. Simplement le poids des formulations verbales, de la discussion et de l'argumentation semble occuper une place plus importante.

L'histoire et le travail de l'historien

L'histoire est une discipline délicate ; les concepts difficiles à saisir sont nombreux, tels ceux de période historique, de régime politique, de classe sociale, de révolution, de libéralisme. La recherche rapportée ci-après représente peu de chose par rapport aux questions de conceptualisation en histoire. Pourtant la thèse préparée par Yeong Hee Lim présente une

originalité qui mérite d'être évoquée, en raison justement de l'audace didactique qu'elle représente. Contrairement à une opinion trop facilement reçue, le travail de l'historien ne consiste pas, ou pas seulement, à établir des faits incontestables, mais aussi et surtout à en rechercher les relations, et à en dresser une « histoire » intelligible. De ce fait il existe des débats entre historiens auxquels les manuels ne font pas toujours suffisamment de part. Yeong Hee Lim est partie de l'exemple de la Renaissance, sur laquelle certains désaccords existent quant à la délimitation temporelle du concept même de Renaissance, et quant à son contenu.
Lorsque Michelet introduit le terme de « Renaissance », il a évidemment en vue d'établir un contraste avec le « Moyen Age », et aussi de distinguer cette période historique de celle des « Temps Modernes ». Il a aussi en vue de souligner les aspects positifs que sont l'émergence des arts et des sciences d'une part, les grandes découvertes d'autre part.
Or certains historiens considèrent que la période qualifiée de Renaissance, n'est que le début des Temps Modernes, et que rien ne justifie l'autonomisation de cette période. En outre, le contenu de cette période n'est pas que positif : les guerres de religion assombrissent gravement l'image d'ouverture que représentent le développement des sciences et des arts et les grandes découvertes.
C'est pour initier les élèves de cours moyen à cette question de la différence d'appréciation des historiens entre eux que Yeong Hee Lim a engagé les élèves dans une recherche de documents sur la période de la Renaissance, et de comparaison entre eux des manuels scolaires de cours moyen. C'est un exemple original de transposition didactique, c'est-à-dire de transformation des questions et des connaissances savantes en questions et connaissances pour l'éducation. Les élèves ont donc examiné plusieurs manuels, et retrouvé certains échos des différences de points de vue entre historiens. C'est un bon exemple de transposition didactique, laquelle ne concerne donc pas que les disciplines dites « dures ».

Le placement de données numériques ou quasi numériques sur une droite.

L'exemple que je vais analyser maintenant intéresse justement de nombreux domaines, aussi bien de sciences humaines que de sciences physiques ou biologiques : témoins l'histoire, avec la frise historique, ou encore l'économie et la géographie, avec l'usage abondant de graphiques. La raison en est que le concept mathématique de droite numérique, c'est-à-dire de représentation des nombres réels par une droite orientée, fondement de la synthèse conceptuelle entre la géométrie et l'algèbre, s'est révélé productif pour toutes les représentations symboliques utilisant les propriétés métriques et les propriétés ordinales de l'espace.
L'étude des difficultés des élèves, et des conceptualisations laborieuses qu'ils doivent élaborer dans des situations de représentation de données, permet de comprendre des aspects essentiels de la genèse de cette construction culturelle. Ce qui est tenu pour transparent par certains enseignants, ne l'est évidemment pas pour les enfants. Le cadre théorique des champs conceptuels permet de suivre certaines étapes du processus d'appropriation.
Dans une recherche menée auprès de six classes de CM2, de sixième et de cinquième, nous avions demandé aux élèves de placer sur une bande de papier de 60 cm de long, soit des poids de bébés à la naissance, soit des âges d'enfants gardés à domicile par une professionnelle de la garde d'enfants, soit des lancers de javelot de sportifs de haut niveau, soit enfin des dates de naissance. Les feuilles n'étaient pas graduées à l'avance, et une ligne droite tracée tout au long de la feuille était le seul repère. On demandait aux enfants de graduer cette ligne en prenant soit un cm pour 100 grammes dans le cas des poids de bébés, soit un cm pour un mois dans le cas des âges d'enfants et des dates de naissance, soit un cm pour 10 cm dans le cas des lancers de javelot.

Dans deux cas, compte tenu de la longueur de la feuille, de l'échelle, et des données proposées aux élèves, il était possible de placer sur la bande à la fois le zéro-origine et les sept données proposées :

- bébés : 800 g, 1 kg et 700 g, 1 kg et 900 g, 3 kg et 100 g, 3 kg et 450 g, 3 kg et 700 g, 4kg et 400 g ; échelle 1 cm pour 100 grammes ;
- âges d'enfants : 8 mois, 1 an et 7 mois, 1 an et 11 mois, 3 ans et 1 mois, 3 ans et 4 mois et demi, 3 ans et 7 mois, 4 ans et 4 mois ; échelle 1 cm pour 1 mois ;

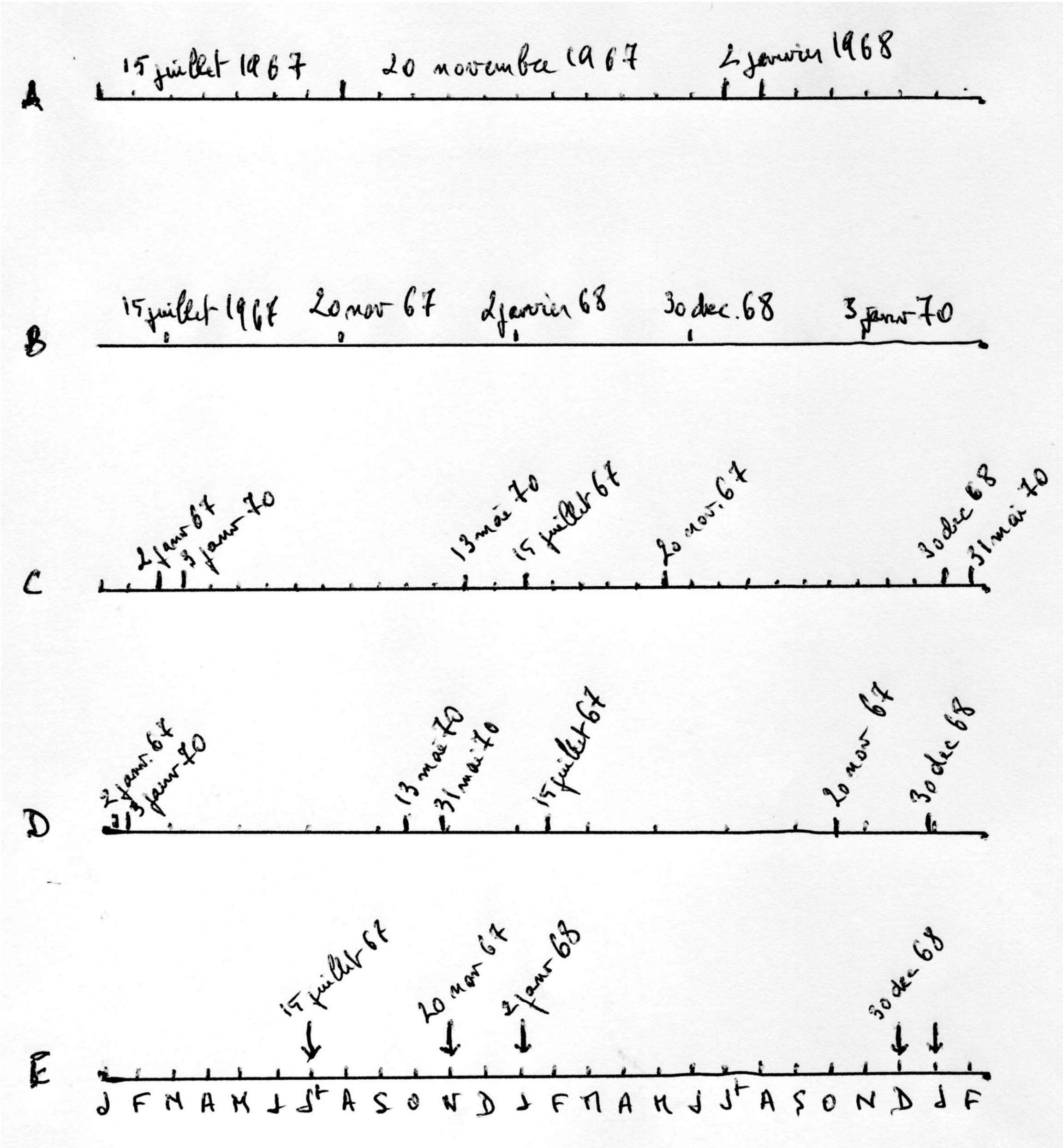
Dans les deux autre cas, c'était impossible : l'échelle choisie ne permettait pas de placer le zéro, et aucune origine naturelle n'était précisée :

-lancers de javelot : 67 mètres et 75 cm, 67 m et 90 cm , 68 m et 10 cm, 68 m et 95 cm, 70 m et 10 cm, 70 m et 55 cm, 70 m et 60 cm ; échelle 1 cm pour 10 cm ;

-dates de naissance : 15 juillet 1967, 20 novembre 1967, 2 janvier 1968, 30 décembre 1968, 3 janvier 1970, 13 mai 1970, 31 mai 1970 ; échelle 1 cm pour 1 mois.

Nous faisions l'hypothèse que les deux dernières situations seraient d'une difficulté plus grande que les deux premières, en raison justement du problème délicat de l'origine. En même temps nous cherchions à apprécier si les données temporelles (âges, dates de naissance) rendaient la tâche plus facile ou plus difficile.

La variété des productions des enfants est à elle seule impressionnante puisque, placés devant une situation inhabituelle pour eux les élèves improvisent et font feu de tout bois. Voici à titre d'exemples certains protocoles recueillis pour les dates de naissance :



Dans le protocole A, les dates sont représentées par des segments de droite mis bout à bout, dont la longueur correspond au $7^{ème}$ mois de l’année (juillet), puis au onzième (novembre), etc. Le jour et l’année ne sont pas pris en compte.

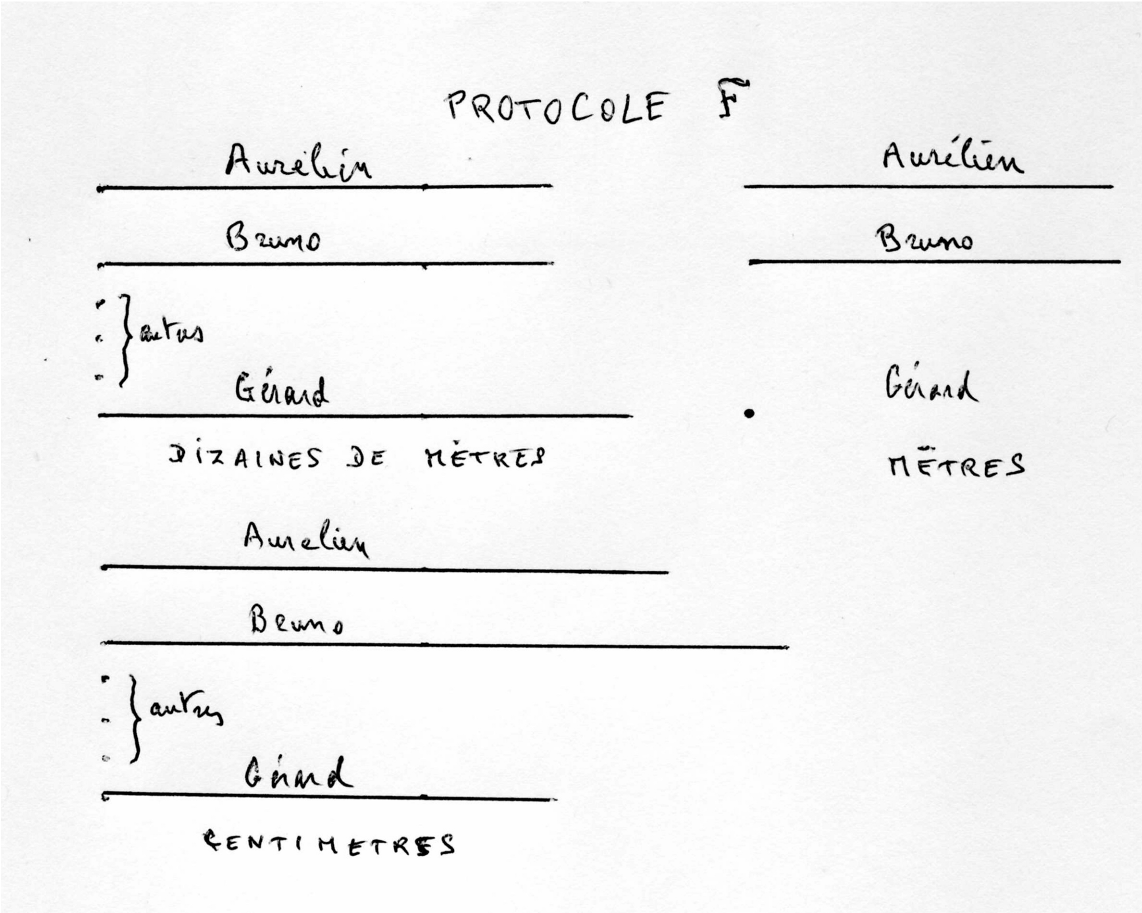
Dans le protocole B, seul est retenu l’ordre des dates de naissances, lesquelles sont placées à intervalles réguliers, sans souci des différences de durée entre dates.

Dans le protocole C, seul le jour du mois est retenu ; le mois et l’année ne sont pas pris en compte.

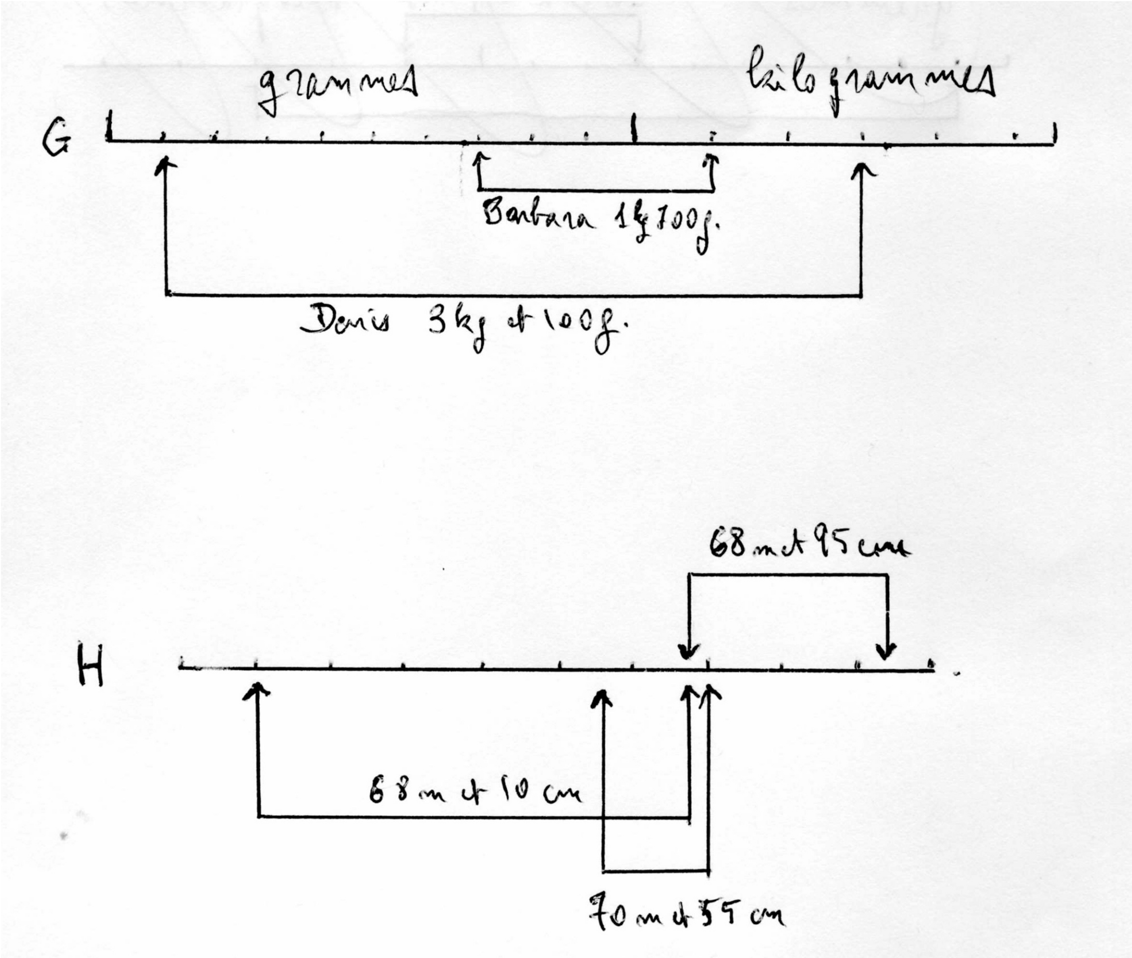
Dans le protocole D, les dates sont projetées comme des anniversaires sur une seule année. Un effort est fait pour distinguer deux dates du même mois, comme le 13 mai et le 31 mai.

Dans le protocole E, un effort est fait pour retenir un ensemble de dates sur plusieurs années, mais les mois sont représentés par des points, et non par des intervalles, de telle sorte que l’on a une échelle d’ordre, issue de la récitation de la suite des mois. Ce type de protocole constitue évidemment un progrès par rapport au protocole B, mais comme lui, il n'utilise, comme marques, que les propriétés ordinales du signifiant spatial.

On observe d'autres solutions, surprenantes et néanmoins très systématiques, comme si les élèves, après avoir imaginé une manière d'interpréter la situation de manière totalement opportuniste, devenaient, avec cette interprétation, totalement méthodiques dans son application.
Voici plusieurs cas intéressants :



F Décomposition de chaque lancer de javelot en trois parties



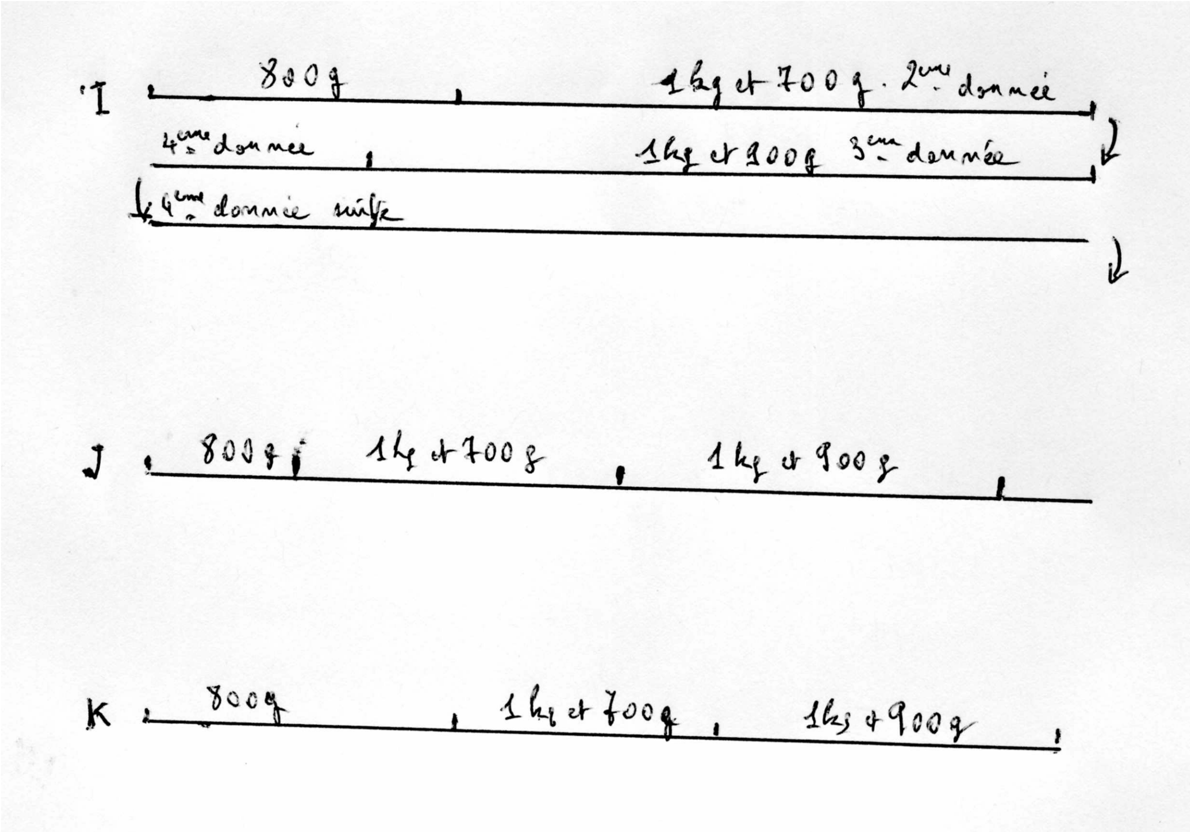
G Deux échelles séparées pour les kilogrammes et les grammes

H Même échelle de 0 à 100 pour les mètres et les centimètres

Tous ces cas de figure pourraient être considérés comme des anecdotes, mais certaines difficultés sont visiblement récurrentes, comme la coordination des systèmes d'unités : kilogrammes et grammes, mètres et centimètres, mois jours années. D'autres difficultés sont moins immédiatement visibles, qui éclairent pourtant de manière intéressante l'appropriation progressive de ce système de représentation, sa « genèse » en quelque sorte. Ce qui suit vise à en rendre compte.

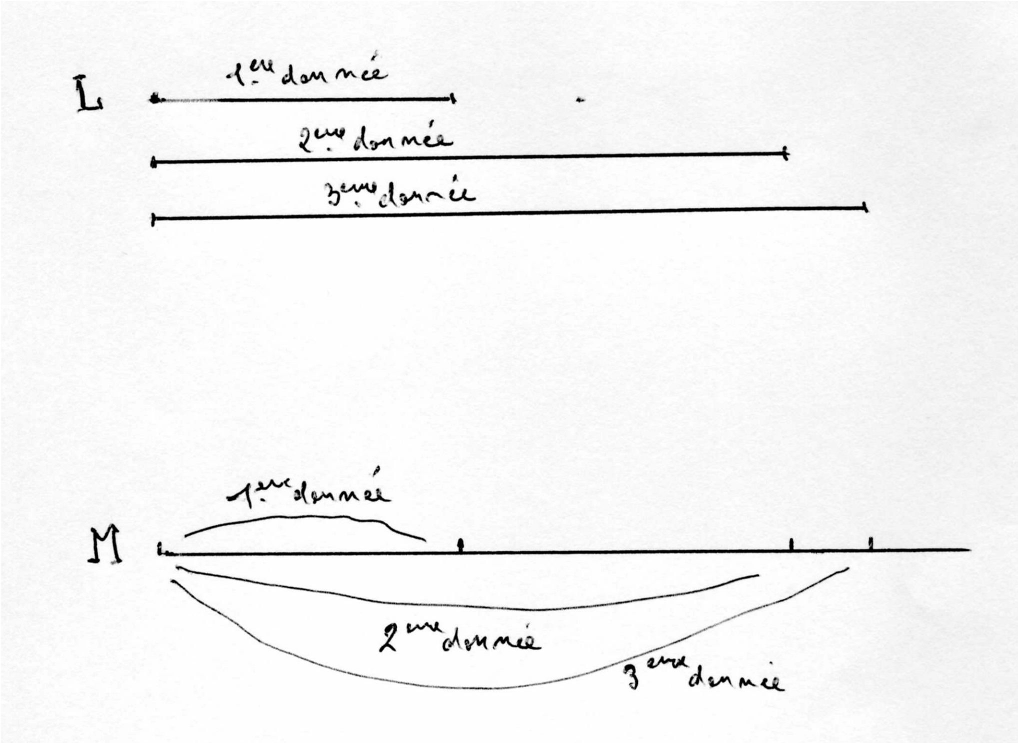
1-Certains protocoles recueillis ne représentent que l'ordre des données, de la plus petite à la plus grande, soit par un point pour chaque donnée, soit par des régions ordonnées de l'espace de gauche à droite en général. Le protocole B en est un exemple.

2-Un grand nombre de productions d'élèves résultent de la mise bout à bout de segments de droite représentant les données, l'une après l'autre. C'est le cas pour les données mesurables comme les poids de bébés ou les lancers de javelot ; mais, de manière surprenante, c'est aussi le cas pour les dates de naissance comme nous l'avons vu avec le protocole A.



Comme la place manque pour mettre bout à bout les segments de droite représentant les données, les élèves peuvent soit continuer sur plusieurs lignes les segments incomplets (protocole I), soit changer d’échelle (protocole J), soit encore ne placer bout à bout que les parties décimales des données (protocole K).

3-Une prochaine catégorie de productions est issue du souci de placer ces segments l’un au-dessus de l’autre à partir d’un même repère de départ ; ou bien du souci d’indiquer que la deuxième donnée n’est pas représentée seulement par la partie nouvelle, mais aussi par le segment correspondant à la première donnée.



On peut caractériser cette étape comme l'adoption, en acte, du principe d'inclusion des signifiants (les segments de droite représentant les données).

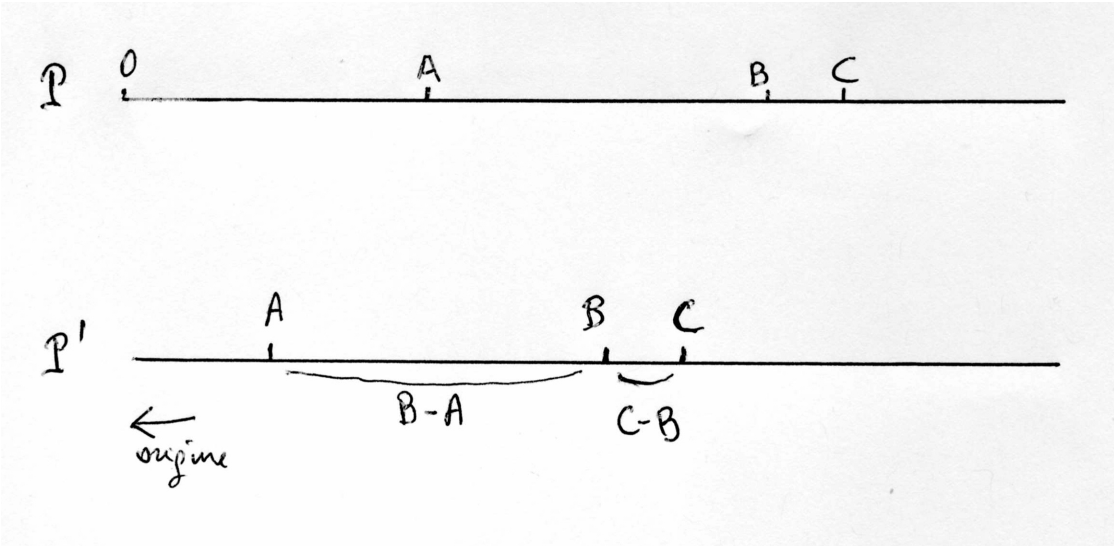
C'est un progrès important, mais cette solution graphique n'est pas satisfaisante puisqu'elle ne fonctionne qu'à la condition que le repère de départ soit considéré comme invariant. Or justement, il n'a pas encore le statut d'origine.

4-La prochaine catégorie de productions marque donc un nouveau saut conceptuel, l'adoption du principe de ponctualisation : comme ils ont un même point de départ à gauche, les segments emboîtés sont en correspondance biunivoque avec leurs extrémités à droite, et il est donc possible de faire jouer à ces points d'arrivée le rôle de signifiants joué par les segments.

L'avantage de cette solution est que l'élève récupère de manière simple, avec la succession des points, la propriété d'ordre que certains élèves s'étaient contentés de représenter, comme dans le protocole B. Sont ainsi coordonnées les propriétés mesurables et les propriétés d'ordre du signifiant spatial, qui représentent ainsi les propriétés correspondantes des données numériques (poids de bébés) ou quasi-numériques (âges des enfants). Dans ces deux cas, heureusement pour les élèves, l'échelle choisie permet de représenter à la fois l'origine et les données.

Le protocole P ci-après illustre cette étape.

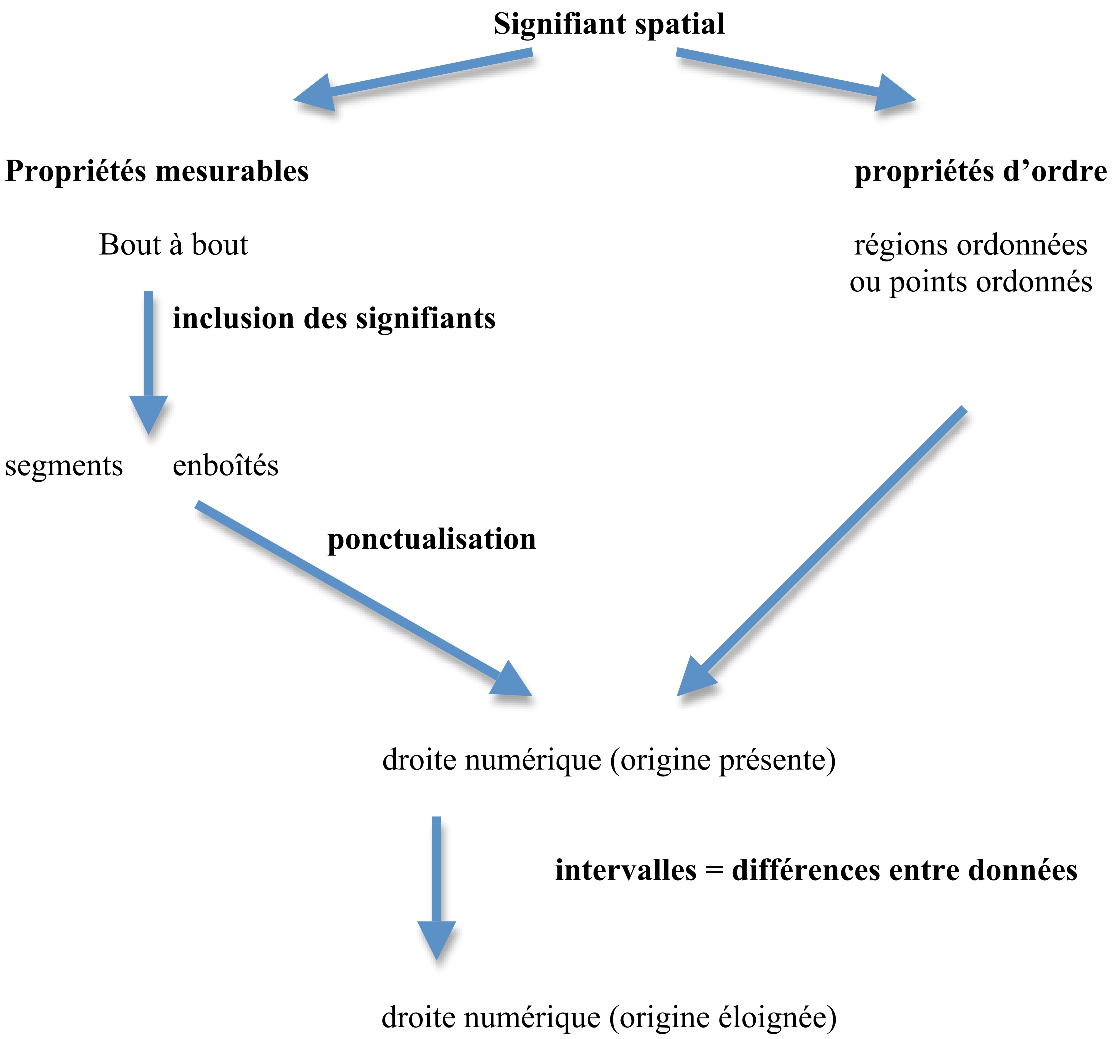
Le protocole P' va plus loin, et représente une nouvelle étape dans la conceptualisation, justement parce que, cette fois, l'échelle proposée ne permet pas de placer à la fois l'origine et les données sur la même bande de papier : des lancers de javelot de plus de 60 mètres avec une échelle de 1 cm pour 10 cm, Il faut alors repousser l'origine en dehors de la feuille.



5-Cette dernière grande étape est donc celle dans laquelle l'enfant place la première donnée quelque part à gauche, soit le point A, puis la seconde donnée B à partir de A, à une distance égale à la différence B-A ; et ainsi de suite pour C, D et les autres données. Les intervalles entre points représentent des différences.
Tout se passe comme si l'élève avait alors effectué un changement d'origine.

Conclusion : La droite numérique n'est pas un système de représentation transparent pour les élèves, mais résulte d'une lente construction, plus délicate qu'il n'y paraît.
Cette construction, opérée par les élèves avec l'aide de l'enseignant, demande que soient levées plusieurs interprétations restrictives. Comment un segment de droite peut-il représenter à la fois une donnée et une partie d'autres données ? Comment un nombre peut-il être associé à un point alors que le point a une mesure nulle ?
Après une séquence didactique de plusieurs heures, sur plusieurs semaines, ces interprétations sont levées pour certains élèves, pas pour tous. Même chez certains élèves de cinquième, des ambigüités demeurent.
L'exemple de la droite numérique, et des représentations graphiques qui lui sont associées, illustre ainsi le fait que les processus de conceptualisation concernent les systèmes de signifiants transmis par la culture, et pas seulement les contenus conceptuels représentables par ces signifiants. Le paradoxe est que les signifiants contribuent à la conceptualisation alors qu'ils ne sont pas transparents. C'est en rendant explicites certaines propriétés et relations pertinentes des signifiés représentés, qu'ils contribuent à la conceptualisation. Pour saisir ces processus paradoxaux, il faut identifier avec soin quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié : ainsi en est-il, pour la droite numérique, des propriétés mesurables de l'espace et de ses propriétés d'ordre.

Le diagramme ci-dessous résume les plus importantes étapes du processus de conceptualisation nécessaire :



L'électromagnétisme

Dans sa thèse, Roja Bagheri étudie les formes de conceptualisation auxquelles parviennent des étudiants d'université lorsqu'ils sont confrontés à plusieurs situations relevant de l'électromagnétisme : rails de Laplace (mouvement induit par la présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique, carte magnétique permettant d'ouvrir une barrière, haut parleur, spire et aimant, téléphone portable…

Dans les entretiens auxquels elle procède avec les étudiants (licence et Capes), ceux-ci sont invités à opérer sur les situations, par exemple en déplaçant un aimant, et à observer l'effet produit, par exemple l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Roja Bagheri est ainsi en mesure d'identifier les invariants opératoires susceptibles d'être pris en compte par les étudiants : invariants directement observables (le caractère fermé du circuit, la déviation du galvanomètre, le déplacement de l'aimant), ou invariants non directement observables (le déplacement des électrons, la variation du champ magnétique, l'induction). Les étudiants sont aussi invités à formuler, dans le langage ordinaire ou dans le formalisme des cours de physique (équations de Maxwell notamment), les propositions qu'ils tiennent pour vraies dans ces situations. Roja Bagheri distingue alors entre les formulations qui décrivent simplement les objets et les effets observables (*on déplace l'aimant*), celles qui relient ces observables aux concepts physiques construits (*le déplacement de l'aimant entraine la variation du champ*

magnétique), celles qui relient des inobservables entre eux (*une différence de potentiel crée un champ électrique*), et, parmi ces dernières, celles qui sont plus sophistiquées et relèvent de l'apprentissage universitaire (*à l'onde électromagnétique sont associés un champ électrique et un champ magnétique variables et perpendiculaires l'un à l'autre*).
Ces formulations constituent des « théorèmes ». On peut dire que ce sont des théorèmes-en-acte formulés ; néanmoins ils correspondent à des jugements éventuellement restés implicites tant que l'entretien avec les étudiants ne comportait pas la demande d'énoncés explicites.
Parmi les situations utilisées par Roja Bagheri, certaines donnent lieu à des formulations plus complexes : par exemple le téléphone portable est l'occasion de formulations sur *les paquets d'ondes magnétiques et leur transmission*. Un autre exemple concerne la situation aimant/spire, à l'occasion de laquelle certains étudiants expriment *des relations entre moments angulaires*, ou encore invoquent *la création d'une force électromotrice*.
L'enseignement et l'apprentissage de la physique mettent ainsi en jeu des relations complexes entre observables et inobservables, qui ajoutent une difficulté à la difficulté conceptuelle des modèles mathématiques sophistiqués utilisés pour rendre compte des processus physiques.

Chapitre 5 : autres champs en mathématiques

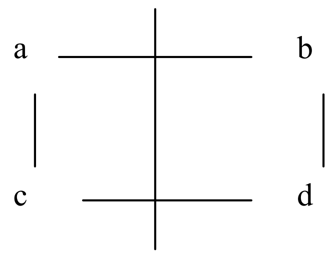
Il faut plusieurs exemples, y compris en mathématiques, pour accréditer la thèse que la théorie des champs conceptuels fournit un cadre de référence approprié pour les recherches sur l'apprentissage et le développement, et ne résulte pas de la rationalisation d'un seul exemple, fût-il convaincant, comme celui des structures additives.

Les structures multiplicatives

Prenons d'abord un deuxième champ conceptuel dans l'arithmétique élémentaire, celui des structures multiplicatives, qui désignent le champ des situations et des concepts impliqués dans les problèmes de multiplication et de division, de proportionnalité simple et multiple, de calcul avec des nombres rationnels, et plus tard d'algèbre linéaire.

Comme pour les structures additives, on peut identifier des situations prototypiques de la multiplication, comme le calcul du coût total d'un petit nombre connu d'objets identiques dont le prix unitaire est connu également, ou encore le calcul du nombre d'objets nécessaires (bonbons ou crayons…) pour une distribution égale entre des enfants. Pour la division, les situations prototypiques sont des situations de partage égal d'une quantité connue, ou encore, dans le cas du coût d'objets, soit le calcul du prix d'une unité connaissant le coût total et le nombre d'unités, soit le calcul du nombre d'unités connaissant le coût total et le coût unitaire.

C'est la proportionnalité qui est la source des situations de multiplication et de division : dans la proportion simple, deux variables sont proportionnelles l'une à l'autre. Dans ces conditions, la multiplication n'est pas d'abord une loi de composition binaire, comme la théorie des groupes la formalise, mais une relation à quatre termes : « d est à c ce que b est à a ; ou encore d est à b ce que c est à a » .



L'inconnue peut être l'un des quatre termes, et les trois autres termes peuvent avoir diverses valeurs : petits nombres entiers, grands nombres entiers, nombres décimaux, nombres plus grands ou plus petits que 1, nombres rationnels, et l'unité tout simplement. Il s'en suit un grand nombre de cas de figure.

Intéressons-nous d'abord aux premiers apprentissages concernant l'école élémentaire, en prenant l'exemple de la distribution de bonbons :

Cas de la multiplication : *on veut distribuer 3 bonbons à chacun de 4 enfants. Combien faut-il de bonbons ?*

Cas de la recherche de la part de chacun (division-partition) : *on distribue 12 bonbons entre 4 enfants. Combien chacun reçoit-il de bonbons ?*

Cas de la recherche du nombre d'enfants (division-quotition) : *on veut distribuer 12 bonbons en donnant 3 bonbons à chaque enfant. A combien d'enfants peut-on faire cette distribution ?*

Cas général de la quatrième proportionnelle : aucun des quatre termes n'est égal à 1. Prenons donc des nombres plus grands. *On achète 12 petits œufs en chocolat pour 30 euros. Pour une grande fête, on veut en acheter 108. Combien cela coûtera-t-il ?*

La parenté est évidente entre les quatre cas, comme le montrent les schémas ci-dessous.
Les termes « partition » et « quotition » sont empruntés aux collègues de langue anglaise : ils sont plus parlants que les expressions que j'avais initialement utilisées: « division de type 1 » et « division de type 2 ».

multiplication

Enfants	bonbons
1	3
4	x

division quotition

Enfants	bonbons
1	3
x	12

division partition

enfants	bonbons
1	x
4	12

quatrième proportionnelle

oeufs en chocolat	coût
12	30
108	x

La présentation en tableaux des quatre cas distingués ci-dessus n'a pas seulement le mérite de rapprocher les unes des autres les situations de multiplication, de division et de quatrième proportionnelle ; elle permet aussi de montrer que les deux divisions n'appellent pas les mêmes opérations de pensée, et que la multiplication peut être pensée de deux manières différentes, non équivalentes entre elles du point de vue des raisonnements et des concepts mis en œuvre.

$$\begin{tikzcd}
\text{enfants} & \text{bonbons} \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[d, "\text{x 4}"] \\
4 \arrow[r, "\text{x3}"'] & x
\end{tikzcd}$$

Verticalement : la multiplication de 3 bonbons par 4 s'analyse comme la multiplication d'une quantité de bonbons par un scalaire « 4 fois plus » (nombre sans dimension), issu de la relation et du raisonnement « 4 fois plus d'enfants » donc « 4 fois plus de bonbons ». On obtient des bonbons. Le théorème-en-acte utilisé est un théorème de base de la fonction linéaire :

$$f(4) = 4.f(1) \qquad \text{plus généralement} \qquad f(n) = n.f(1)$$

La multiplication s'appuie alors sur l'addition itérée $f(1) + f(1) +\ldots\ldots+f(1)$ (n fois)

Horizontalement : la multiplication de 4 par 3 est d'une tout autre nature : on multiplie un nombre d'enfants (4) par une autre quantité (en l'occurrence un nombre de bonbons par enfant, c'est-à-dire un quotient de deux quantités distinctes). On ne peut pas alors ramener la multiplication à une addition itérée parce que l'addition de 4 enfants, puis de 4 enfants, puis encore de 4 enfants ne peut pas donner des bonbons. Une équation aux dimensions permet de comprendre la cohérence formelle du raisonnement :

4 enfants x 3 bonbons/1 enfant = 12 bonbons

la dimension « enfant » du numérateur est annulée par la dimension « enfant » du dénominateur ; on obtient bien des bonbons.

On peut interpréter ce raisonnement comme l'application d'un coefficient de proportionnalité

$$f(x) = ax$$

mais on se ramène ainsi à une relation entre nombres, qui n'exprime que partiellement la relation entre les quantités.

La plupart des recherches montrent que le premier raisonnement (vertical) est saisi par les enfants plus précocement que le second (horizontal). Pendant une certaine période de l'apprentissage, la multiplication n'est donc pas commutative. Assez vite cependant, elle le devient, au moins pour les nombres entiers ; ce n'est pas le cas aussi vite pour les décimaux plus petits que 1, comme nous le verrons un peu plus loin.

Dans la division partition, on peut considérer que « 1 enfant c'est 4 fois moins que 4 enfants » ; il faut et il suffit alors d'extraire le rapport scalaire « 4 fois moins » et de l'appliquer à 12 bonbons pour trouver la part unitaire.

La division quotition implique des opérations de pensée sensiblement plus délicates : il faut calculer un nombre d'enfants et l'on a des informations numériques sur les bonbons. On ne peut pas donner à la division qui permet de passer de 3 bonbons à 1 enfant, un sens aussi aisément énonçable que le « 4 fois moins » ci-dessus : un enfant ce n'est pas quatre fois moins que trois bonbons.

Voici la remarque d'un enfant de 9 ans, à qui la maîtresse expliquait que, pour trouver le nombre d'enfants auxquels on peut distribuer 12 bonbons, en donnant 3 bonbons à chaque enfant, il faut diviser 12 par 3. L'enfant s'exclame alors : « *ben alors, on divise des bonbons par des bonbons et on trouve des enfants* ». Cette remarque est significative du fait que les enfants raisonnent sur des quantités et des grandeurs, non pas sur des nombres seulement.

Il n'est pas inutile, à ce point de l'exposé, d'énoncer quelques-uns des théorèmes-en-acte utilisés par les enfants lorsqu'ils traitent des situations de proportionnalité simple ; ce sont des propriétés de la fonction linéaire. Ils sont exprimés ici sous une forme générale : même si leur utilisation reste circonscrite à certaines grandeurs, et à des sous-ensembles privilégiés de valeurs numériques, ils s'appliquent bien à des classes de situations, et ont donc une portée relativement générale. Ils ne sont pas explicités par les élèves qui les utilisent, en tous cas pas sous cette forme, qui est évidemment celle du chercheur.

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
$f(kx) = kf(x)$
$f(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)$
$f(x) = ax$
$x = f(x)/a$

Les deux théorèmes en acte $f(kx) = kf(x)$ et $f(x = ax$ sont mathématiquement équivalents, en ce sens qu'ils conduisent tous deux au choix de l'opération pertinente, la multiplication. Voici une petite expérience qui permet de montrer que, lorsqu'on a à faire à des nombres plus petits que un, la multiplication n'est pas d'emblée commutative ; et donc les deux théorèmes ne sont pas équivalents du point de vue des usages, et de l'apprentissage.

Premier cas *: Quel est le coût de 0,75 kg de peinture spéciale à 135 euros le kg ? Faut-il faire une multiplication ou une division ?*
Deuxième cas : *Quel est le coût de 135 kg de liège à 0,75 euros le kg ? Faut-il faire une multiplication ou une division ?*

L'expérience peut être faite avec des élèves de collège, et même avec des adultes. Le résultat est surprenant : dans le deuxième cas la grande majorité des sujets interrogés déclarent qu'il faut faire une multiplication ; dans le premier cas, certains déclarent qu'il faut faire une division, et beaucoup hésitent à répondre.
La raison de cette non commutativité est à chercher dans le fait que le nombre plus petit que un ne se trouve pas dans la même position.
Dans le premier cas, le raisonnement scalaire $f(x) = xf(1)$ qui est le plus « naturel », conduit à multiplier 135 euros par 0,75 ; mais comme 0,75 est plus petit que un, et qu'une des idées intempestives des élèves est que « la multiplication fait plus grand », le choix de cette opération se heurte au fait que le résultat attendu sera alors plus petit que 135.
La propriété de monotonie « si $x< y$, alors $f(x) < f(y)$ » fait ainsi obstacle au choix de la bonne opération.

Dans le deuxième cas, comme 135 est plus grand que un, il n'y a pas d'obstacle à choisir la multiplication. Et la grande majorité des élèves fait le bon choix.

Composition de plusieurs proportionnalités

Les proportionnalités (et les fonctions linéaires) peuvent se composer entre elles de deux manières différentes :
soit par concaténation, l'ensemble d'arrivée de la première jouant le rôle d'ensemble de départ de la seconde,
soit par produit, lorsqu'une grandeur est proportionnelle à deux autres grandeurs, indépendantes entre elles.

Concaténation : *le coût de location d'une voiture est de 45 euros par jour. Combien faut-il prévoir pour une location de 14 semaines?*
Produit : *le coût de la pension dans un hôtel est de 45 euros par jour et par personne. Quelle dépense faut-il prévoir pour 7 personnes pendant 14 jours ?*

Dans le premier cas, les trois grandeurs en jeu, les semaines, les jours et les dépenses à prévoir, sont toutes proportionnelles entre elles. Dans le second cas, les dépenses sont proportionnelles au nombre de personnes et à la durée du séjour, mais la durée n'est évidemment pas proportionnelle au nombre de personnes. Même si les nombres en jeu sont les mêmes (45, 7, 14), les classes de situations susceptibles d'être rencontrées sont différentes, et les raisonnements de difficulté inégale.
Les proportionnalités qui s'enchaînent peuvent être représentées dans des tableaux à plusieurs colonnes, parallèles entre elles:

Semaines	jours	dépenses
	1	45
1	7	x

Les proportionnalités doubles demandent des tableaux indiquant à la fois une proportionnalité ligne à ligne et une proportionnalité colonne à colonne :

Personnes / jours	1	7
1	45	
14		x

Si l'on double le nombre de semaines pour la location de voiture, on double aussi le nombre de jours et la dépense. Si l'on double le nombre de jours pour la location des chambres d'hôtel, on double certes la dépense, mais pas le nombre de personnes.

En résumé, les problèmes de multiplication et de division, prennent place dans un vaste ensemble de situations de proportionnalité simple et multiple, dans lesquelles sont mis en jeu de manière complémentaire des concepts variés, comme ceux de grandeur, de rapport scalaire, de coefficient de proportionnalité, d'analyse dimensionnelle, de variable, de fonction linéaire, bilinéaire et multilinéaire, de combinaison linéaire, de dépendance et d'indépendance. Ces concepts interviennent « en acte » et ne sont pas faciles à formuler par les élèves, moins encore à formaliser. Néanmoins, on peut favoriser l'identification des situations et des moyens de les traiter en utilisant certains systèmes de signifiants, comme par exemple les tableaux et les flèches.

Les formules sont les signifiants le plus classiquement utilisés dans l'enseignement des mathématiques et de la physique. Les considérations qui précèdent conduisent à poser la question de l'interprétation des formules par les utilisateurs, en premier lieu par les élèves.
Prenons l'exemple du volume du parallélépipède rectangle :

$$V = L \times l \times h$$

L longueur ; l largeur ; h hauteur

L'observation des élèves et l'analyse des manuels montrent que trois lectures différentes peuvent être faites de cette formule :
1-utilisation directe de la formule : pour calculer le volume il faut connaître la longueur, la largeur et la hauteur ; et multiplier ces trois données l'une par l'autre ;
2-utilisation inverse : pour calculer l'une des trois dimensions du parallélépipède, il faut connaître le volume et les deux autres dimensions ; et diviser le volume par le produit des deux dimensions connues ;
3- le volume est proportionnel à la longueur quand la largeur et la hauteur sont tenues constantes ; à la largeur quand la longueur et la hauteur sont tenues constantes ; et à la hauteur quand la longueur et la largeur sont tenues constantes.

Cette dernière interprétation ; qui ne figure pas dans la plupart des manuels, est en fait la raison conceptuelle de la formule : justement parce que longueur, largeur et hauteur sont des variables indépendantes.
On voit ainsi le bénéfice que les élèves peuvent tirer de l'introduction dans l'enseignement de la proportionnalité double et de sa représentation par un tableau à double entrée (comme plus haut à propos de la dépense à l'hôtel de 7 personnes pendant 14 jours).

Ainsi les systèmes de signifiants/signifiés peuvent jouer leur rôle dans la conceptualisation des structures multiplicatives comme dans celle des structures additives. Ne nous y trompons pas cependant : les mots, les énoncés, les tableaux, et les autres systèmes de signifiants ne sont pas des concepts : symbole n'est pas concept ; l'opération de lecture et d'interprétation est conceptuelle ; le signifiant ne joue pas seul son rôle.

L'algèbre, un système opératoire de signifiants/signifiés

La culture contemporaine fait un grand usage de signifiants, en premier lieu de la langue bien entendu, qui a en outre une fonction de métalangage pour tous les autres systèmes de signifiants. Mais la culture recourt aussi à des systèmes iconographiques comme les cartes, les couleurs, les graphiques, les flèches, les tableaux, et les dessins idiosyncratiques par lequel chacun accompagne ou ébauche un raisonnement.

L'algèbre a un statut tout particulier depuis le 17 ème siècle, c'est-à-dire depuis qu'elle est devenue le mode le plus communément utilisé par les mathématiciens et les physiciens.
L'école est le lieu où l'on apprend l'algèbre. Retenons, pour les lecteurs qui ne sont pas directement intéressés par les mathématiques, que c'est avec l'ouvrage de géométrie de Descartes de 1637, que le symbolisme algébrique trouve sa forme quasi définitive. Depuis Diophante, il n 'avait pas fallu moins de vingt siècles pour mûrir ce système. Mais l'algèbre n'est pas que symbole : elle ne se réduit pas à l'utilisation de lettres et de signes pour les différentes catégories de variables et d'opérations qu'il s'agit de représenter. L'algèbre apprise au collège et au lycée suppose des conceptualisations nouvelles, plus importantes encore que celles requises par la maîtrise de la droite numérique, analysées dans le chapitre précédent. Ces conceptualisations vont bien au delà de celles de l'arithmétique élémentaire.
Les concepts de fonction et de variable, d'équation et d'inconnue font partie de l'arsenal conceptuel nouveau que doivent s'approprier les élèves, non pas que ces concepts soient absents de l'arithmétique élémentaire, mais ils ne sont alors qu'implicites dans les raisonnement et les calculs ; dans l'algèbre, ils deviennent explicites. Sans ces nouveaux objets de pensée, on ne peut aller très loin dans la compréhension de l'algèbre. Mais ce n'est pas tout ; dans la mise en équation, il existe déjà des différences tangibles entre les différents sens que l'arithmétique ordinaire et l'algèbre permettent d'accorder aux quatre opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division.

Prenons l'exemple de la soustraction et du signe moins :
La même forme symbolique $x + a = b$ donc $x = b - a$ peut représenter des cas de figure très différents :

1 Il y a 12 enfants pour l'anniversaire de Pierre ; 7 d'entre eux sont des garçons ; combien y a-t-il de filles ?
$7 + x = 12 \quad x = 12 - 7$

2 Robert vient de gagner 15 billes en jouant avec Rosa ; il a maintenant 36 billes ; combien de billes avait-il avant de jouer ?
$x + 15 = 36 \quad x = 36 - 15$

3 Fatima a 13 ans ; son frère Karim a 8 ans ; de combien d'années Fatima est-elle plus vieille que Karim ?
$8 + x = 13 \quad x = 13 - 8$

4 Bernard avait 32 billes avant de jouer avec Robert ; il n'en a plus que 17 ; que s'est-il passé pendant la partie ?
on peut utiliser deux représentations différentes :
$32 + x = 17 \quad x = 17 - 32$
$32 - x = 17 \quad x = 32 - 17$

En dépit de leur simplicité, et du fait qu'on n'a pas besoin de l'algèbre pour les résoudre, ces petits problèmes illustrent bien les différentes relations représentables par la même équation et la même solution algébrique :
La réunion de deux parties en un tout (exemple 1)
La transformation d'un état initial en un état final (exemples 2 et 4)
La comparaison de deux grandeurs (exemple 3)

En outre, l'avant dernière représentation « 32 + x = 17 x = 17 – 32 » suppose qu'on donne du sens à la solution négative d'une équation. C'est une conceptualisation nouvelle, même si elle s'appuie sur le même théorème en acte que dans l'exemple 2 : T = F - I « transformation égale état final moins état initial ».

Ces relations de base permettent d'imaginer des problèmes plus complexes, pour lesquels l'algèbre apporte une solution plus aisée que ne le ferait un raisonnement purement arithmétique. On commence alors à apprécier la fonctionnalité de l'algèbre.

5 Il y a 92 personnes au mariage de Tatiana. Il y a 4 femmes de plus que d'hommes. Combien y a-t-il d'hommes ?

6 Robert a beaucoup de voitures miniature ; en ce qui concerne les voitures françaises, il en a 21 ; il a 3 Renault de plus que de Peugeot, et deux fois plus de Citroën que de Renault. Combien a-t-il de voitures de chaque marque ?

7 Fatima a 4 ans de plus que Karim ; Quand elle sera deux fois plus âgée, Karim sera trois fois plus vieux qu'il n'est aujourd'hui. Quel âge ont-ils aujourd'hui ?

8 André a joué une première partie de billes le matin mais ne se souvient plus de ce qui s'est passé. L'après-midi il joue une nouvelle partie et gagne 18 billes. Il compte alors ses billes et trouve qu'il a 14 billes de moins que ce qu'il avait avant d'aller jouer le matin. Que s'est-il passé le matin ?

Ces différents exemples montrent comme les précédents (1 à 4) que les opérations algébriques peuvent représenter plusieurs sortes de relations et de raisonnements. C'est ce qui fait la force de l'algèbre ; mais en même temps c'est une source de difficultés pour les élèves.

Il existe à la fois des continuités et des ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre : l'algèbre s'appuie nécessairement sur les conceptualisations antérieurement formées ; mais le détour formel est une rupture avec l'arithmétique, ainsi que la confrontation avec des objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation, d'inconnue, de fonction et de variable, déjà évoqués plus haut, et plusieurs autres, comme ceux de monôme, de polynôme, de nombre relatif, de nombre rationnel, d'identité remarquable…

Comme le disait Lagrange, l'algèbre est « l'art de déterminer des quantités inconnues par des fonctions de quantités connues ou qu'on regarde comme connues » Cette dernière idée est caractéristique du détour formel. Comment le caractériser un peu plus complètement ? L'arithmétique consiste dans le choix pertinent des données et des opérations permettant de conduire dans le bon ordre le calcul d'inconnues intermédiaires, et de se rapprocher ainsi de l'inconnue finale ; cheminement dans lequel l'activité est contrôlée par le sens des grandeurs et des relations successivement calculées. L'algèbre, elle, consiste en l'extraction de relations pertinentes liant l'inconnue aux données, en la formalisation symbolique de ces relations, et en l'application de scripts-algorithmes, c'est-à-dire d'algorithmes s'appuyant en permanence sur les symboles écrits dans les expressions formelles. Alors que l'intuition a une place importante dans les raisonnements arithmétiques, les règles algébriques sont éventuellement peu intuitives et néanmoins strictes.
Elles sont strictes mais inégalement utilisées par les élèves, selon l'équation à résoudre. Voici un exemple : le script-algorithme, applicable aux équations de type ax + b = c

$3x + 14 = 35$
$3x + 14 – 14 = 35 – 14$
$3x = 35 – 14 = 21$
$3x/3 = 21/3$
$x = 7$

Ce script-algorithme s'appuie presque complètement sur la procédure arithmétique qui aurait pu être utilisée en l'absence de l'algèbre : soustraire 14 de 35, puis diviser le résultat par 3. Toutefois plusieurs théorèmes proprement algébriques sont tenus pour vrais, qui autorisent l'algorithme : la conservation de l'égalité sous certaines transformations (soustraire un même nombre des deux côtés du signe d'égalité, diviser par un même nombre les deux membres de l'équation).

Que peuvent faire les élèves devant des équations qui s'éloignant de ce prototype ? Voici deux cas, sensiblement différents :

$3x + 35 = 14$
$35 – 3x = 14$

Dans le premier cas, la solution est négative, et beaucoup d'élèves anticipent qu'il leur faudrait soustraire 35 de 14, ce qu'ils ne savent pas faire. Ils considèrent alors la résolution comme impossible.
Dans le second cas, alors que l'équation $35 – 3x = 14$ est équivalente à $3x + 14 = 35$ qu'ils savent résoudre, beaucoup d'élèves hésitent à ajouter 3x des deux côtés de l'équation, de manière à annuler la fonction -3x dans le premier membre « parce qu'on ne connaît pas x ». En d'autres termes, pour conserver l'égalité et la valeur de la solution, on peut ajouter ou soustraire un nombre connu, mais pas une fonction de x.
On retrouve ainsi un phénomène déjà vu à plusieurs reprises, le caractère local et non général des opérations pertinentes, et le privilège accordé à certains cas de figure prototypiques.

Les difficultés des élèves sont encore plus grandes lorsqu'ils sont confrontés à des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, ou que la mise en équation appellerait plusieurs inconnues comme dans l'exemple des voitures miniature mentionné plus haut. Et paradoxalement c'est dans ces cas-là que l'algèbre montre son opérationnalité, par rapport à l'arithmétique. Coût et bénéfice conceptuels vont souvent de pair. Il y a un prix à payer pour une efficacité plus grande.

Cette remarque conduit à se demander, au-delà des fonctions de l'algèbre, quel sens les élèves peuvent et doivent lui découvrir au cours de leurs apprentissages. Le sens d'une activité se situe dans les schèmes, comme Piaget aimait à le dire. Je distinguerai quatre sens, de niveau différent : schématiquement, on peut les formuler en termes de compétences :
1-savoir quoi faire devant une équation donnée. Il y a plusieurs niveaux puisqu'on peut savoir quoi faire pour certaines équations et pas pour d'autres…
2-savoir mettre un problème en équation : extraire les relations pertinentes, contrôler leur indépendance…
3-identifier des objets de pensée nouveaux : équation, fonction, variable, paramètre, identité…
4-identifier les fonctions de l'algèbre : résoudre des problèmes malaisés, prouver une relation…

La compétence 4 est franchement métacognitive ; elle représente aussi, pour les élèves, une sorte de généralisation-extension de l'arithmétique.
La compétence 3 suppose des conceptualisations explicites.
Mais les compétences 1 et 2 ne supposent que des schèmes d'action en situation, même s'il est possible que les élèves aillent au-delà de ce critère. D'ailleurs la compétence 2 ne peut que reposer sur des schèmes, puisqu'il n'existe pas d'algorithme pour mettre une situation en équation.

La construction du sens est donc un processus de longue haleine, pour l'algèbre comme pour les structures additives ou les structures multiplicatives. Elle repose sur des activités et des conceptualisations différentes.

L'un des problèmes des algorithmes, au cours de l'apprentissage, est que peuvent se substituer à eux des schèmes personnels, soit erronés, soit éventuellement efficaces, mais ne respectant pas les règles de l'algorithme.
Parmi les erreurs courantes, signalons la fausse distributivité d'une opération sur une autre :

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$
$(a + b)/(c + d) = a/c + b/d$
$5^{n + m} = 5^n + 5^m$

Parmi les schèmes non erronés signalons les raccourcis :

$3x + 14 = 35$
$3x = 21$
$x = 7$
ainsi que les raisonnements qui négligent les formes symboliques utilisées, mais conduisent néanmoins à la réussite en s'appuyant sur le sens des grandeurs et des nombres en jeu.

Il y aurait beaucoup d'autres commentaires à faire sur l'apprentissage de l'algèbre, même en s'en tenant à l'algèbre élémentaire, mais on peut se contenter de souligner, à la lumière de ce que nous venons d'observer, que les formes d('organisation de l'activité peuvent porter sur des symboles et pas seulement sur des objets. Cela justifie qu'on parle de script-algorithme. Ce serait néanmoins une erreur de ne voir dans les symboles que la part du signifiant, alors que les exemples rapportés ici montrent que les signifiés jouent un rôle décisif dans les opérations conduites sur et avec les symboles.

Chapitre 5 Rapport au réel et incertitude

Le rapport au réel est la clef principale de l'organisation de l'activité et du pouvoir d'agir. Si l'action est la source et le critère de la connaissance, alors les formes d'organisation de l'activité et les situations auxquelles s'adressent ces formes conduisent à rechercher les parentés et les différences possibles.
Les difficultés auxquelles se heurte l'action humaine sont de plusieurs ordres : le caractère inaccessible des processus sur lesquels il faudrait pouvoir peser, l'incertitude liée aux aléas des effets de l'action, le caractère irrationnel ou insuffisamment rationnel de la représentation du domaine dans lequel l'activité est engagée, la complexité excessive des raisonnements et calculs qu'il serait nécessaire de conduire pour réussir. Ces difficultés sont liées les unes aux autres, sans qu'on puisse pourtant réduire chacune d'elles aux autres. Un travail théorique est donc indispensable pour comprendre un peu mieux cet enchevêtrement de difficultés.

Le présent chapitre est orienté par plusieurs distinctions conceptuelles:

entre information et conceptualisation
entre observable et inobservable
entre situations nécessaires, régulières et aléatoires
entre production, observation passive et interaction
entre représentation calculable et processus associatif.

Le présent chapitre vise à formuler quelques-uns des principes permettant de nourrir ces distinctions et d'en clarifier les relations. La formulation de principes est coutumière dans l'histoire des sciences ; elle n'a guère préoccupé les psychologues, sauf peut-être au cours des premiers épisodes de l'histoire de la psychologie, et en outre davantage du côté des behavioristes que du côté des cognitivistes et des culturalistes. Le présent chapitre surprendra donc par son ambition et son originalité.

Commençons par un retour à Platon
Le mythe de la caverne peut être interprété comme exprimant globalement le caractère subjectif de la représentation du réel; mais on peut aussi décomposer sa signification en deux principes distincts : d'une part que le réel ne nous fournit pas tous les observables qui nous seraient nécessaires pour en former une représentation adéquate (c'est le principe d'information lacunaire), d'autre part que nous interprétons les observables qui nous sont accessibles avec des ressources conceptuelles plus ou moins limitées, voire erronées (c'est le principe de conceptualisation partielle : partiellement juste et partiellement fausse).

Principe d'information lacunaire ou principe de Platon : le réel ne nous fournit pas tous les observables qui nous permettraient de le comprendre. Seule une partie du réel nous est accessible, même avec les instruments sophistiqués que les hommes se sont donnés.

Principe de conceptualisation partielle : l'information pertinente n'est pas toute utilisée, ni correctement ; le sujet peut se construire une représentation partiellement erronée, et s'intéresser à des informations non pertinentes.

La distinction entre ces deux principes permet de donner deux sens distincts à l'épistémologie constructiviste :
1- l'observateur est inéluctablement conduit à construire (élaborer) des hypothèses sur les inobservables qui lui permettraient de comprendre les observables ;
2- il existe néanmoins des situations pour lesquelles l'accès aux observables serait suffisant pour décider d'une conception ou d'une action, à condition toutefois que le sujet dispose des ressources conceptuelles nécessaires à la saisie des informations pertinentes et à leur traitement. Le constructivisme prend alors un deuxième sens, celui de la formation de ces ressources au cours du développement, de l'apprentissage et de l'expérience. Ce sens-là est très important pour une approche développementale de la conceptualisation,

Ces deux principes ont du sens non seulement pour l'appropriation de la culture par des sujets individuels, mais aussi pour la culture elle-même. L'épistémologie constructiviste concerne donc à la fois la culture et le développement cognitif des individus.

Se pose donc la question de la sélection et du traitement de l'information pertinente, puisque celle-ci n'est ni toujours sélectionnée, ni toujours correctement interprétée. C'est justement cette fonction qu'assure la conceptualisation, y compris par le moyen des invariants opératoires, souvent implicites.
Il ne faut pas confondre information et conceptualisation. L'une des confusions souterraines les plus graves des recherches des 30 dernières années en sciences cognitives concerne justement la confusion entre concept et information. Le modèle de l'informatique n'est pas pour rien dans cette confusion, puisque les programmes informatiques symbolisent concepts et informations par des signifiants voisins voire identiques. Pour la psychologie, le paradigme du traitement de l'information a été une référence aussi perverse qu'utile.

Qu'est-ce que la conceptualisation ?

Nous avons déjà formulé plus haut la définition qui nous semble nécessaire pour traiter des compétences complexes : **l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, de leurs relations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi directe ou d'une construction.**

Cette définition vaut principe.

Etudier les processus de conceptualisation semble une gageure. Une première raison est que ces processus prennent des années, chez l'enfant et chez l'adulte . Une seconde raison est qu'on ne dispose pas de tous les moyens qui seraient nécessaires pour les identifier, y compris lorsque ces processus sont accompagnés de verbalisations : en effet, non seulement les conceptualisations peuvent intervenir de manière totalement implicite dans l'activité, mais même lorsqu'elles sont accompagnées de formes langagières, ces dernières ne reflètent pas nécessairement les conceptualisations opérées. C'est pourquoi il est si important, pour le psychologue, d'identifier les conceptualisations qui interviennent dans l'activité en situation (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte), si délicate et hypothétique que soit cette identification.

Tout se prête à conceptualisation, en morale comme en mathématiques, en sport comme en musique, dans l'interaction sociale et affective avec autrui comme dans un métier bien caractérisé. Il est vrai cependant que certaines catégories conceptuelles s'avèrent particulièrement importantes pour étudier les étapes du développement cognitif de l'enfant, ou pour débattre de la signification de certains résultats expérimentaux.Tel est le cas par exemple des catégories que sont les concepts de différence, de ressemblance, d'équivalence, d'ordre, de nombre, de mesure, de variable, de valeur, de transformation, de composition, de fonction, de comparaison… et des concepts d'objet et de prédicat, de propriété et de relation à deux ou plusieurs places.

La construction de la rationalité

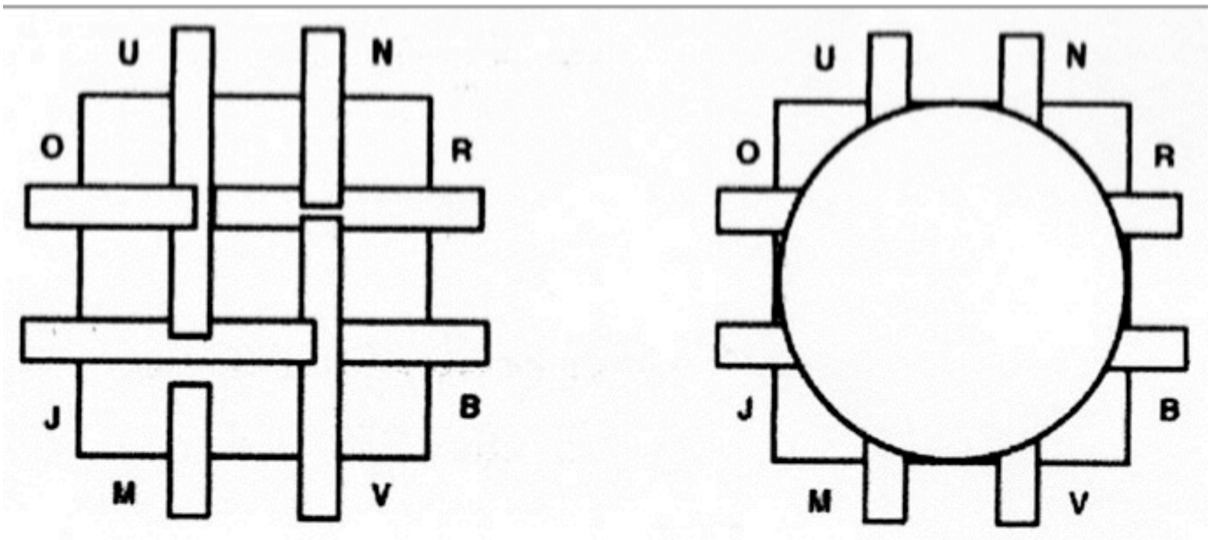
Un enjeu essentiel de l'école et de la culture est la construction de la rationalité, en entendant par là, puisque justement l'action est le critère ultime de la connaissance, l'élaboration de représentations suffisamment fonctionnelles pour permettre aux individus d'agir à bon escient en situation. L'idée de rationalité dépasse ainsi celle de science, même si la science en est une composante essentielle. Cette élaboration est évidemment sociale, historique même, mais elle est aussi individuelle puisque chacun de nous doit refaire une partie du chemin pour son propre compte, et qu'en outre ce sont aussi des individus qui font l'histoire, même s'ils ne la font pas seuls.

Partons d'une étude empirique concernant le jeune enfant. Elle va permettre d'illustrer certaines des distinctions énoncées plus haut. Cette étude a été effectuée vers les années 1965 et suivantes, pour la préparation d'une thèse. Elle utilise la distinction entre relations observables et relations non observables, ainsi qu'entre situation potentiellement « nécessaire » et « situation hypothétique ».

Considérons les deux dispositifs ci-dessous : le premier laisse totalement visibles les relations d'encastrement entre barres ; le second les cache.
On demande aux enfants, dans les deux cas, de tirer **la barre R (rouge)**.

Dispositif visible

Dispositif caché



La caractéristique la plus intéressante de la première situation est que le sujet bénéficie de deux conditions favorables pour découvrir les moyens de résoudre le problème posé. En premier lieu, il a accès à l'information nécessaire pour décider à quelle barre il est pertinent de s'intéresser à tel ou tel moment ; ce n'est pas le cas dans la seconde situation, puisque les relations entre barres sont cachées par le disque. En second lieu, c'est son action seule qui détermine la transformation de la situation : situation privilégiée par rapport au cas où la modification des relations entre objets dépend non seulement de l'action propre du sujet, mais aussi de processus sui generis sur lesquels le sujet n'a pas prise, ou pas totalement.
De ce fait, dans la première situation, lorsque le dispositif est entièrement visible, les enfants ne rencontrent pas d'autre difficulté que celle de comprendre les relations d'encastrement entre barres et d'en faire leur profit pour conduire leur activité au fur et à mesure. C'est justement cette situation favorable qui permet de montrer que les jeunes enfants ne saisissent pas toute l'information pertinente, faute des ressources conceptuelles adéquates ; la perception, prise au sens de lecture du réel, est une forme de conceptualisation.

Voici une description résumée des différentes manières de procéder des enfants :

1 dans un premier temps, et de manière générale avant 4 ans et demi, ils tirent alternativement la barre R (rouge) et la barre V (verte) sans parvenir évidemment à débloquer ni l'une ni l'autre. Tout se passe comme s'ils avaient bien perçu une certaine relation matérielle entre les deux barres, sans en voir la dissymétrie. La question ne se pose pas pour la barre N (noire) puisque cette dernière est libre.

2 entre 4 ans et demi et 6 ans selon les enfants, un schème plus opératoire apparaît : remonter de la barre R (rouge) à la barre V (verte), tenter de tirer la barre verte, examiner la situation, tenter de tirer la barre J (jaune), qui est encastrée dans la barre verte ; et recommencer ainsi en remontant de la barre bloquée à la barre qui bloque : successivement la barre J (jaune), puis la barre violette (U), puis la barre orange (O). Tout se passe comme si les enfants avaient alors perçu le caractère antisymétrique de la relation d'encastrement : si X est encastrée dans Y alors Y n'est pas encastrée dans X. Il ne sert donc à rien de tirer alternativement les deux barres.

3 on observe d'autres schèmes, comme par exemple celui qui consiste à tourner de proche en proche autour du dispositif : barre R, puis B (bleue), puis V (verte), puis M (marron), puis J (jaune)… Aucun enfant ne parvient ainsi à débloquer la barre rouge, bien que ce schème permette théoriquement d'aboutir en un nombre fini de tours et de tentatives.
La conceptualisation du dispositif comme ensemble de barres disposées spatialement autour du cadre n'est pas opératoire à ce niveau du développement de l'enfant.

4 après quelques années, à partir de 6 ans pour les enfants les plus précoces, et plus tard pour la plupart d'entre eux, les enfants économisent l'essai infructueux de tirer la barre bloquée, comme ils le faisaient en 2, et se contentent de parcourir des yeux la suite des barres, en remontant de la barre bloquée à celle qui bloque. Et ils tirent directement la barre orange, quittes à recommencer le processus à partir de la barre rouge ou d'une autre barre. Très vite cependant certains enfants redescendent directement la série qu'ils viennent de remonter.
Tout se passe comme si les enfants avaient perçu le caractère transitif de la règle qui leur permet d'avancer : s'il faut tirer X pour tirer Y, et s'il faut tirer Z pour tirer X, alors il faut tirer Z pour tirer Y. Remarquons au passage que la relation d'encastrement entre barres n'est pas elle-même transitive ; seule la règle d'action l'est.

On peut donc identifier différentes conceptualisation de la relation d'encastrement:
- la connexité : il y a une relation entre la barre X et la barre Y ;
- l'antisymétrie : il faut remonter de la barre bloquée à la barre qui bloque ;

- la transitivité : cette dernière règle est transitive ;
- la disposition spatiale autour du dispositif, qui n'est pas opératoire à elle seule.

Lorsqu'on propose aux enfants, après qu'ils aient été confrontés à la situation matérielle de déblocage de la barre rouge, de dessiner le dispositif (qui est rappelons-le entièrement visible), les plus jeunes se contentent de dessiner des bouts de barres sortant du cadre (lequel est alors réduit à une sorte de boite noire), ou même d'aligner des traits de couleurs différentes (simple reconnaissance de l'existence des barres !). Par contre, lorsqu'ils commencent à s'intéresser à la relation d'encastrement, celle-ci prend une importance démesurée dans leur dessin, ce qui témoigne d'une certaine prise de conscience. Il existe ainsi une corrélation entre la représentation du dispositif par le dessin, et les propriétés du dispositif utilisées dans l'activité de déblocage des barres.

Commentaires :
Premier commentaire : la situation proposée aux enfants lorsque le dispositif est pleinement visible est une situation « nécessaire concrète » ; par différence avec les situations « non nécessaires » d'une part, et d'autre part avec les situations qui relèvent d'une « nécessité abstraite » comme les démonstrations, lorsque la nécessité des théorèmes repose sur les définitions, les axiomes et les hypothèses retenues.
Le nécessaire concret se caractérise par une information directement accessible, du moins pour les enfants ayant atteint un certain niveau de compréhension du domaine d'activité concerné.
Lorsque le cache circulaire est mis en place, dans la deuxième situation, on se trouve dans une situation non nécessaire, sauf si les bonnes hypothèses sont faites sur les relations cachées, ce qui suppose une longue exploration, souvent infructueuse, même chez les adultes. On a alors à faire à du « nécessaire abstrait », qui repose sur les hypothèses imaginées par le sujet et sur leur cohérence. Dans cette situation aussi on peut demander au sujet un dessin des relations entre barres, mais il s'agit cette fois d'un dessin hypothétique. Dans les deux cas du dispositif visible et du dispositif caché, on peut donc rapprocher, pour les mettre en relation, la conduite observée (forme opératoire de la connaissance) et le dessin réalisé (forme prédicative particulière). Mais dans cette étude empirique, la conduite des enfants en situation nous a apporté davantage d'informations que leur dessin.

Un second commentaire est que les schèmes décrits plus haut sous 2 et sous 4 sont des algorithmes, puisqu'ils reposent sur une lecture rationnelle des relations entre barres, dont résultent nécessairement les règles d'action. Le schème décrit sous 3 par contre n'est pas un algorithme pour les enfants observés. Les algorithmes sont des schèmes, mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes.
Le paradoxe est que, dans la deuxième situation, lorsque les relations entre barres sont toutes cachées, le schème 3 peut à la limite (et très exceptionnellement) acquérir les propriétés d'un algorithme, en raison du nombre fini de possibilités. Rappelons que ce schème consiste à essayer de tirer les barres l'une après l'autre, en suivant l'ordre spatial autour du dispositif, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre ; après une quinzaine d'essais, toutes les barres peuvent effectivement être tirées. Mais on peut aussi compliquer beaucoup les choses en introduisant dans le dispositif des relations dans lesquelles le bon geste est de pousser la barre, non de la tirer. Les bonnes hypothèses sur les relations cachées sont alors plus difficiles encore.
Le « nombre fini de pas nécessaires » pour venir à bout d'une situation ne constitue pas à soi seul une définition suffisante du concept d'algorithme. L'idée de relation nécessaire entre les propriétés des objets et les propriétés de l'action est essentielle.

Le schème 3 illustre bien la double fonction du schème dans l'organisation de l'activité : à la fois instrument d'action sur le réel et moyen d'interrogation du réel. En outre, comme nous le verrons plus loin, il est à la fois moyen et résultat de l'activité, et à ce titre une composante de la représentation, comme reflet intériorisé de l'activité.

Enfin, dernier commentaire, dire qu'il y a plusieurs niveaux de conceptualisation, c'est aussi dire qu'il y a plusieurs niveaux d'objets de pensée : les barres, la connexité, l'encastrement, l'antisymétrie, la règle, la transitivité…

Qu'est-ce que la rationalité et comment se développe-t-elle ?

L'exemple que nous venons d'analyser montre qu'il existe des situations nécessaires concrètes, dans lesquelles l'action du sujet à elle seule permet de produire des effets dans le réel. C'est un cas privilégié, et l'on comprend que les enfants puissent entrer dans la rationalité grâce à des situations de ce type : nécessaires et productives. L'action est alors suffisante. Les déplacements d'objets dans l'espace, les changements de points de vue du sujet en fonction de sa position, relèvent largement de ce type. Pour tout dire, la géométrie des déplacements est une assise de la rationalité.
Que dire lorsqu'on s'écarte de ce prototype ?
On peut s'en écarter de deux manières différentes, soit en perdant le pouvoir d'agir ou d'agir seul sur les événements, soit en perdant l'accès à l'information pertinente qui serait nécessaire. C'est le cas notamment en physique, en chimie, en biologie et en psychologie. Le principe de Platon de l'information lacunaire devient alors essentiel. Et pourtant la rationalité se développe aussi dans ces situations.
Pour mettre un peu de clarté dans la réflexion, il faut distinguer d'une part entre situations nécessaires, situations régulières et situations aléatoires, d'autre part entre situations productives, situations d'observation passive, et situations d'interaction.
En croisant ces deux critères, on obtient six grandes classes de situations, concernant la qualité de l'information disponible et la manière de la produire.

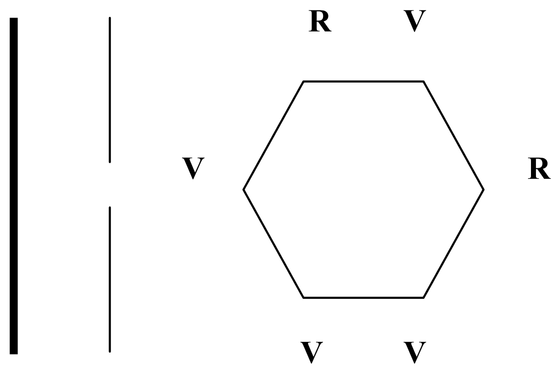
	Nécessaires	régulières	aléatoires
Productives			
Passives			
Interactives			

Cette double distinction est intéressante pour étudier le développement cognitif des enfants et des élèves, notamment lorsqu'on adopte une approche pragmatique du cognitif comme c'est le cas dans cet ouvrage. En effet si la connaissance est adaptation, et que les schèmes d'adaptent à des situations, il est décisif de pouvoir saisir le mouvement de la pensée par lequel les ressources conceptuelles s'adressent à la nouveauté, fût-elle celle des situations régulières et passives, ou des situations aléatoires et interactives, le cas visiblement le plus résistant à la rationalité.
Le cadre ainsi esquissé est intéressant aussi pour l'histoire de la culture, par exemple pour l'astronomie, qui relève typiquement de l'observation de régularités, sur lesquelles les hommes n'avaient aucune influence. La sélection des ressources retenues pour interpréter des

processus nouveaux, témoigne souvent du rapprochement analogique et même métaphorique par lequel nous ramenons en pensée le différent au même, ou à tout le moins au semblable.

Principe de développement de la rationalité : la rationalité se développe d'abord dans des situations nécessaires et productives, dans lesquelles le sujet a accès aux observables qui lui permettent, s'il est en mesure de prendre l'information pertinente, d'agir et de prévoir à coup sûr. En même temps son action seule suffit à produire les événements singuliers à prévoir.
La rationalité s'étend par la suite aux situations régulières, puis aléatoires, dans la mesure où une certaine théorisation, plus ou moins hypothétique, en est formée. Est important le fait que les événements qui se produisent sont totalement, partiellement, ou pas du tout sous le contrôle du sujet : s'ils ne dépendent que de son action propre, les éventuelles régularités sont plus facilement appréhendées.

Prenons des exemples de situations permettant d'illustrer simplement la distinction entre nécessaire, régulier et aléatoire.
Commençons par le cas de l'**aléatoire** : deux lampes, l'une verte, l'autre rouge, s'allument de manière aléatoire, avec comme seule contrainte que la lampe verte s'allume deux fois plus souvent que la rouge. Les expérimentations montrent que la plupart des sujets, adultes comme enfants, ajustent progressivement leurs prédictions à la loi de probabilité *deux fois vert pour une fois rouge*. Remarquons que, en toute rigueur, la rationalité commanderait de prévoir toujours vert, pour maximiser les gains.
Dans le cas du **régulier**, la suite d'événements est faite de patterns qui se répètent, et permet, après une observation plus ou moins longue, de prédire les événements singuliers: par exemple RVVRVVRVV… ou, plus complexe, RVRVVVRVRVVVRV…
Dans un troisième cas, celui du nécessaire, la séquence est engendrée par la rotation d'un ensemble de 6 lampes, positionnées sur un cercle ou un hexagone, de telle sorte que chacune projette sur un écran soit une lueur rouge soit une lueur verte, avec la même régularité que dans la dernière suite RVRVVVRVRVVVRV…



On n'est pas très éloigné de la situation imaginée par Platon. C'est une situation nécessaire, pour l'observateur qui peut voir la rotation de l'hexagone, une situation seulement régulière pour l'observateur qui ne verrait que la lueur projetée sur le mur, et même une situation aléatoire pour l'observateur qui ne détecterait pas la régularité.

A partir de là on peut formuler trois principes d'incertitude :
Le premier concerne les situations aléatoires : on est incertain parce qu'on ne peut pas prévoir les événements singuliers ;

Le second concerne aussi les situations seulement régulières : on est incertain parce qu'on n'a pas accès à toute l'information qui serait nécessaire ;
Le troisième principe concerne toutes les situations, y compris les situations nécessaires : on est incertain parce qu'on ne dispose pas des catégories de pensée, explicites ou implicites, qui permettraient de saisir et de traiter toute l'information pertinente.
C'est ce dernier principe qui exprime le plus clairement l'importance de la conceptualisation, et donc des invariants opératoires, dans le jeu contre l'incertitude. On le voit bien dans la manière dont les enfants traitent le dispositif des barres encastrées lorsque celui-ci est visible. Mais les invariants opératoires, n'en sont pas moins décisifs aussi pour l'élaboration et la compréhension des représentations calculables concernant les situations régulières et aléatoires. Le troisième principe d'incertitude concerne donc toutes les situations.

On pourrait ajouter un dernier principe d'incertitude, apparemment transversal par rapport aux trois premiers : on est incertain parce qu'on ne peut pas modifier le cours des choses. Mais ce dernier principe tient justement au fait qu'on ne dispose pas des ressources conceptuelles pour appréhender les situations nécessaires, régulières et aléatoires. L'approche développementale de la conceptualisation est la clef principale pour comprendre la compréhension progressive du réel par les enfants, et leur victoire contre l'incertitude.

Chapitre 7 Développement et appropriation de la culture

La théorie des champs conceptuels est une théorie du développement des ressources de la personne, et d'abord de ses schèmes. Interviennent dans ce développement plusieurs types de processus (l'apprentissage, l'expérience, la découverte en situation, la conscience, l'exercice…), plusieurs registres de l'activité (la perception, les gestes, les raisonnements, les techniques, l'interaction avec autrui, l'activité langagière…), et plusieurs empans temporels (le court terme et le long terme de l'expérience, l'éclair de la brusque prise de conscience, la lente maturation des ressources...).

Cet ensemble est si complexe que ce serait une gageure d'en tenter une analyse systématique et exhaustive. Pourtant cela vaut la peine d'essayer d'identifier certaines des relations entre processus ou entre registres : par exemple entre expérience et apprentissage, ou entre raisonnements et interactions avec autrui. Dans le travail et dans l'éducation, ces interactions sont essentielles.

Instinct, schème, habitus et algorithme

Si la connaissance est adaptation et que ce sont les schèmes qui s'adaptent, ce sont aussi les schèmes qui se développent. Etudier le répertoire des schèmes dont dispose progressivement un individu est essentiel, mais c'est une gageure aujourd'hui, et pour longtemps. Aussi bien devons-nous discuter en priorité de l'orientation théorique d'une telle entreprise. Commençons par discuter des rapports du concept de schème avec des concepts parents, qui ont une pertinence pour l'étude du développement : ceux d'instinct, d'habitus et d'algorithme. L'organisation de l'activité humaine ne relève pas que du concept de schème ; elle est aussi faite de réflexes et d'instincts ; il faut donc considérer les relations entre schème et instinct. D'autre part, comme les formes d'activité d'un individu lui sont pour une part importante transmises par la famille, l'école et le milieu social et professionnel, il faut aussi considérer les relations entre schèmes et habitus social, ou, mieux dit, entre schèmes individuels et schèmes culturels. Enfin une place à part mérite d'être faite au concept d'algorithme, vu son importance dans les activités mathématiques, et plus généralement scientifiques et techniques.

Schème et instinct

Comme le schème, l'instinct est composé de buts, de règles, et d'invariants. La parenté avec les schèmes saute aux yeux, au point que les schèmes peuvent apparaître comme les héritiers des instincts ; ni les uns ni les autres ne sont totalement conscients et intentionnels, mais l'intention semble très peu développée et peu ou pas consciente dans l'instinct. En outre ce sont les schèmes qui sont les instruments principaux de l'adaptation, pas les instincts, sauf au départ. Prenons comme exemples le geste du nourrisson de téter le lait maternel, ou encore, chez le bébé de 6 ou 8 mois, le geste de se mettre debout dans son parc, ou encore le geste de la marche : il ne fait aucun doute que ces activités sont programmées par des instincts congénitaux, même si elles ne le sont pas totalement. Les instincts de l'allaitement, de la station debout et de la marche ne concernent pas que le petit zèbre ou le veau, mais toute la famille des mammifères, et donc l'homme bien sûr. En outre, à côté des instincts dont la manifestation est précoce après la naissance, il existe des instincts qui ne donnent naissance à

des activités effectives qu'au bout d'une certaine durée de vie, comme le vol chez les oiseaux et le comportement sexuel chez l'homme.
Ces remarques ne sont pas une découverte évidemment, mais il n'est pas anodin de souligner que les schèmes prennent appui sur les instincts et en transforment la forme et le déroulement temporel. Par exemple, le bébé qui cherche le sein de sa mère progresse dans l'orientation de sa tête et dans le mouvement corrélatif des autres parties de son corps, de ses bras notamment, de telle sorte que le schème du bébé d'un mois résulte d'une transformation importante de l'instinct des premiers jours. De même le bébé qui se lève dans son parc explore plusieurs possibilités, qui deviennent (ou ne deviennent pas s'il les abandonne) des solutions alternatives au problème de se retrouver debout. L'organisation de cette activité est ensuite mise en œuvre avec d'autres supports que le parc : par exemple une chaise ou la jambe de pantalon du papa, ainsi que nous l'avons vu dans le premier chapitre. Plus tard lorsque l'adolescent apprend à danser la valse ou le be-bop, ses instincts (marche, saut, course…) lui sont d'un secours limité, et il doit alors développer des schèmes dont la structure s'éloigne rapidement des formes gestuelles antérieures, sur lesquelles pourtant elle s'appuie.
Il reste qu'un instinct est orienté par un but (ou plusieurs), qu'il s'exprime par une suite d'actions, de prises d'information et de contrôles, et qu'il s'appuie sur l'identification perceptive d'objets et de relations. La distance théorique n'est donc pas si grande entre l'instinct et le schème.

Schème et habitus

L'apprenti danseur peut devoir s'astreindre à suivre des cours, ou à imiter des danseurs plus chevronnés ; Il existe à l'évidence des évolutions, et même des modes, dans les façons de danser : on peut parler de schèmes culturels, ou encore d'habitus. Néanmoins, les schèmes du danseur, apprenti ou expert, lui sont personnels et ne reproduisent pas purement et simplement les formes apprises.
Ni instincts, ni habitus, les schèmes d'une personne n'en héritent pas moins de ces deux sources. Prenons l'exemple du saut en hauteur ; l'instinct en est à l'origine, mais dans le seul vingtième siècle la forme experte en a beaucoup évolué, du saut en ciseaux au roulé dorsal en passant par le roulé ventral. Il reste qu'un champion d'aujourd'hui s'y prend d'une manière personnelle.
Ce qui est vrai du geste, et de la prise d'information au cours du geste, est vrai aussi du raisonnement en situation de résolution de problème : en classe de mathématiques on apprend certains moyens de traiter tel ou tel type de problème de géométrie, en mécanique auto on apprend à diagnostiquer tel ou tel type de panne et à lui porter remède, mais dans l'un et l'autre cas l'élève et l'apprenti finissent par adopter des formes personnelles.

Schème et algorithme

Ainsi les schèmes personnels ne sont pas une simple copie des schèmes culturels. Prenons l'exemple des rapports entre schème et algorithme. Ce choix est justifié par la question principale étudiée dans cet ouvrage : celle de la formation des compétences complexes et de la rationalité. Le concept d'algorithme vient des mathématiques : il désigne une forme d'organisation de l'activité, qui aboutit en un nombre fini de pas à la solution d'un problème d'une certaine classe de problèmes, s'il en existe une, ou à la démonstration qu'il n'y a pas de solution. Ce concept est d'une grande importance dans les enseignements scientifiques et techniques, et se trouve au cœur des apprentissages scolaires et professionnels. Ces apprentissages ne sont pas faits que d'algorithmes, bien évidemment, mais deux raisons principales font qu'il est intéressant d'analyser les rapports entre schème et algorithme :

- dans l'appropriation des algorithmes transmis par l'école ou la société, les sujets apprenants font inévitablement appel à leurs schèmes personnels pour leur donner du sens ; ces algorithmes peuvent alors devenir personnels.
- lorsque des difficultés se présentent dans l'exécution des algorithmes qui leur ont été enseignés, les élèves leur substituent des schèmes idiosyncratiques, non algorithmiques.

Ces phénomènes conduisent à un nouveau principe, qui intéresse au premier chef les didacticiens:

Principe d'inclusion : les algorithmes sont des schèmes et les schèmes ne sont pas tous des algorithmes.

La plupart des algorithmes rencontrés à l'école et dans le travail ont été élaborés au cours de l'histoire, et sont donc des constructions sociales. Mais nous avons vu dans le chapitre 5, avec le dispositif des barres encastrées, que certaines manières de procéder des enfants étaient des algorithmes, en ce sens qu'elles aboutissaient en un nombre fini de pas à dégager la barre rouge (celle qu'on demandait à l'enfant de parvenir à tirer). D'autres manières de faire n'aboutissaient pas, bien qu'elles soient aussi réglées et systématiques.
Cela montre qu'il existe des algorithmes spontanés et que le concept d'algorithme n'est pas purement culturel ; cela montre aussi qu'algorithmes et schèmes non algorithmiques appartiennent à une même famille ; et cela permet aussi de souligner le fait que le caractère systématique n'est pas suffisant pour caractériser le concept d'algorithme. Mieux encore, le critère du nombre fini de pas n'est pas suffisant pour comprendre l'émergence d'un algorithme personnel puisque l'enfant doit alors saisir, au moins implicitement, le rapport de nécessité qui relie l'organisation de son activité et les propriétés du dispositif.

En mathématiques, on a coutume de considérer que les quatre opérations numériques d'addition, de soustraction, de multiplication et de division sont des algorithmes. Et qu'en outre ce sont des algorithmes culturels, puisqu'ils sont transmis par l'école, qu'ils ont varié au cours de l'histoire, et varient encore aujourd'hui selon les cultures. Les systèmes symboliques utilisés pèsent d'un poids certain dans les variations observées (songeons aux différences entre la numération romaine et la numération arabe), mais le concept d'algorithme n'est pas assujetti à l'écriture des nombres, ni plus généralement aux systèmes de signifiants utilisés pour représenter les objets mathématiques : il existe des algorithmes de raisonnement dans le traitement des situations d'arithmétique ordinaire qui ne sont pas associés à des signifiants. On en a vu des exemples dans le cas de la proportionnalité et dans celui des structures additives. C'est un argument décisif en faveur des idées de concept-en-acte et de théorème-en-acte.
A côté des algorithmes qui leur sont enseignés, en effet, les élèves développent des schèmes personnels qui peuvent le cas échéant revêtir les propriétés de nécessité et d'aboutissement en un nombre fini de pas qui sont celles des algorithmes ; ces schèmes personnels peuvent alors supplanter les algorithmes enseignés. Tel est le cas, dans les situations de recherche d'une quatrième proportionnelle, pour les schèmes utilisant les propriétés d'isomorphisme additif et multiplicatif de la fonction linéaire : pour le calcul de la distance parcourue par un train en 36 minutes, sachant qu'il a mis 16 minutes pour parcourir 40 kilomètres. Un raisonnement observé à maintes reprises consiste à approcher 36 par deux fois 16 minutes, soit 32 minutes ; il reste alors 4 minutes pour atteindre 36, qui est le quart de 16. Par isomorphisme, la distance

parcourue sera deux fois 40 km plus le quart de 40, soit 80 plus 10, donc 90 km. Le schème de décomposition linéaire et le théorème-en-acte correspondant :

$$f(2x16 + 1/4x16) = 2f(16) + \frac{1}{4}f(16)$$

l'emportent sur l'algorithme de la règle de trois, enseigné partout dans le monde et, tous comptes faits, peu ou mal utilisé. L'évocation du théorème d'isomorphisme ci-dessus est facilitée par le fait que les valeurs numériques se prêtent au raisonnement, mais on n'observe jamais la décomposition de 40 en deux fois 16 plus la moitié de 16, pourtant plus aisée du point de vue purement numérique : la raison en est que la décomposition additive de 40 en 32 plus 8 n'a pas de sens, s'agissant d'une distance (40 km) d'un côté, et d'une durée (32 minutes) de l'autre. Le raisonnement porte donc sur les grandeurs et pas sur les valeurs numériques seulement. L'analyse dimensionnelle trouve ici une première raison. De ces remarques on peut tirer un nouveau principe.

Les algorithmes personnels (et les schèmes) prennent en compte des objets et des propriétés du réel qui ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux habituellement retenus dans la culture scolaire ou professionnelle.

Développement des schèmes personnels

Principe d'émergence et de développement: un schème se forme dans des conditions locales, c'est-à-dire pour des valeurs propices des variables de situation, et donc pour une classe de situations relativement circonscrite. Les concepts-en-acte et les théorèmes-acte gardent une certaine trace de ces conditions initiales.
Pour que sa portée s'élargisse, par assimilation, à une classe plus large de situations, un schème doit s'enrichir de diverses façons : par la reconnaissance de certaines propriétés partagées par les nouvelles et les anciennes situations, et donc par la formation d'invariants, éventuellement analogiques ou métaphoriques, entre les situations non encore maîtrisées et les situations auxquelles s'adressait jusqu'alors le schème déjà formé : c'est la face « accommodation » du processus d'adaptation. Ce processus fait souvent appel à l'élaboration d'opérations de pensée et de schèmes complémentaires.

Revenons sur l'exemple du schème du dénombrement : les jeunes enfants mettent ce schème en œuvre d'abord pour des collections petites, de quelques objets seulement. Pour des collections plus grandes ils vont devoir l'enrichir par un meilleur contrôle perceptif et gestuel de la règle « *les compter tous, et ne pas compter deux fois le même* ». Cela prend quelques mois ou quelques années. Un exemple spectaculaire est celui décrit dans le premier chapitre, à propos du dénombrement des places dans le stade de Nantes : les deux personnes chargées de ce dénombrement ont utilisé des propriétés de la numération, de la proportionnalité et de la moyenne, que les enfants de l'école élémentaire maîtrisent mal ; en outre, lorsque l'un des partenaires a proposé de calculer la moyenne entre la rangée du bas et celle du haut, et de multiplier cette moyenne par le nombre de rangées, il a eu du mal à convaincre son collègue. Les théorèmes-en-acte des deux partenaires étaient donc différents. Au cours du développement l'évidence gagne de nouveaux terrains, jusque chez les adultes.
Au-delà du dénombrement de collections discrètes, les enfants vont aussi étendre progressivement certains schèmes numériques aux grandeurs continues et aux mesures, aux grandeurs spatiales en particulier.

Principe de variété et de différentiation: lorsqu'il existe plusieurs schèmes susceptibles d'être utilisés pour une même classe de situations, cela offre des possibilités de vicariance et d'adaptation à différents cas de figure. Le même sujet peut alors mobiliser un schème ou un autre selon les valeurs des variables de situation ; il peut aussi privilégier l'un d'eux, par une sorte d'idiosyncrasie personnelle ; et des sujets différents peuvent privilégier des schèmes différents. Entre plusieurs schèmes s'adressant à la même classe de situations, certaines équivalences peuvent être reconnues et établies ; elles peuvent aussi ne pas être aperçues, de telle sorte que les uns pensent qu'il faut s'y prendre d'une certaine manière, à l'exclusion de toute autre, et n'acceptent pas qu'on s'y prenne autrement. Cette rigidité n'épargne pas certains enseignants.
Un schème peut l'emporter sur tous les autres pour des raisons variées : sa meilleure efficacité, sa portée plus large, sa familiarité, sa fiabilité, sa meilleure compatibilité avec les schèmes des partenaires, ou encore avec les normes culturelles.

La différentiation entre schèmes, opérée par le sujet lui-même au cours de son expérience, par exemple en raison de leur efficacité respective, fait partie du processus de développement. C'est un enrichissement du répertoire de ressources, qui s'appuie immanquablement sur des processus réflexifs, même lorsque c'est le modèle de la culture ambiante qui offre l'occasion de cette différenciation.

Généralité du concept de schème: le concept de schème est pertinent pour tous les registres de l'activité : les gestes, les interactions avec autrui, les raisonnements scientifiques et techniques, les activités langagières et conversationnelles, l'argumentation, l'affectivité, les émotions.
Pour les besoins de l'analyse, le chercheur peut être amené à concentrer son regard sur l'un ou l'autre de ces registres, et à négliger les autres. Mais ils interviennent tous dans l'éducation et le travail, Il est souvent instructif de regarder plusieurs registres à la fois, en raison de leurs interactions .

Principe d'intégration temporelle : l'organisation des activités complexes consiste dans la combinaison synchronique et diachronique de segments d'activité plus petits, d'une durée variable.
L'analyse des sous-schèmes responsables de ces segments d'activité est utile, mais il ne faut pas oublier que la fonctionnalité de l'activité est une propriété de l'ensemble ainsi constitué, non des segments. La mise en œuvre d'un sous-schème dépend de celle des autres. Les analyses à plusieurs niveaux ont du sens, mais elles ne sont pas en général réductibles les unes aux autres, et le tout n'est pas réductible à la composition des parties.
Pourtant les enseignants et les entraîneurs sportifs, comme d'autres formateurs d'ailleurs n'hésitent pas à organiser l'exercice séparé de certaines composantes d'un geste, d'une activité de calcul et de raisonnement, de la compréhension ou de la production d'un texte. Témoins de cela, en mathématiques, les exercices d'entraînement aux quatre opérations de l'arithmétique qui, malheureusement, peuvent aussi devenir des activités pour elles-mêmes, sans rapport avec les raisonnements qui justifieraient le choix de ces opérations ; ou, autres exemples, les sous-schèmes identifiés comme particulièrement délicats dans le geste de service au tennis, dans les gestes de la danseuse, du musicien, de la chanteuse.
Ces exercices séparés peuvent faire perdre du sens à l'activité, mais ils peuvent aussi permettre de remédier à un défaut local, ou faciliter la transposition d'une situation à une autre : par exemple, le schème du service au tennis a quelque rapport avec celui du volley-ball pour certaines de ses composantes. L'exercice séparé peut concerner certaines composantes, et permettre de montrer leur parenté, ou leur différence.

Type logique des invariants opératoires et des concepts

Il existe des sauts qualitatifs au cours du développement : un cas important est la formation de concepts de niveau logique différent. Un premier exemple est celui de la valeur prise par une certaine qualité et cette qualité elle-même : les concepts de bleu ou de vert n'ont pas le même type logique que celui de couleur, et on ne peut pas imaginer facilement que le concept de couleur soit construit par l'enfant avant ceux de bleu et de vert. La propriété « bleu » se dit d'objets différents comme des vêtements, des crayons, le ciel…Le concept de « couleur » résulte de la réunion en pensée des différentes valeurs que sont justement ces différentes propriétés possibles des objets que sont le bleu, le vert, le jaune etc. En d'autres termes « bleu » désigne la classe d'équivalence des objets qui partagent cette propriété, alors que « couleur » n'est la propriété d'aucun objet, mais désigne le quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence « avoir la même couleur que » quelle que soit cette couleur. Le concept « couleur » est d'un type logique supérieur à celui des concepts « bleu » et « vert » : il les suppose construits. En retour, les concepts « bleu » et « vert » deviennent des valeurs différentes du concept « couleur » nouvellement formé. De la même manière le concept de « nombre » est d'un type logique supérieur à ceux de « deux », « trois » et « quatre ».
Ce processus se répète à d'autres niveaux de complexité. C'est ainsi que le concept de « fonction » est d'un type logique supérieur à celui des différents cas d'association des objets d'un ensemble de départ aux objets d'un ensemble d'arrivée, que ces objets de départ ou d'arrivée soient des objets matériels, des nombres, ou des relations quelconques.
Dans le chapitre « signifiants/signifiés » nous avons relevé un autre exemple de changement de type logique avec le concept de « symétrie » : d'abord prédicat à une place, puis à trois places, s'appliquant à des figures variées, il devient objet de pensée à part entière et se trouve muni à son tour de propriétés et de relations.
Il est donc fréquent, en mathématiques notamment, que des concepts de type logique différent soient construits en s'appuyant les uns sur les autres. C'est aussi le cas pour les formes syntaxiques et lexicales du langage naturel, puisqu'elles expriment les relations qui interviennent dans l'activité humaine, des plus simples aux plus complexes. Dans l'exemple de la symétrie, il y a saut qualitatif entre adjectif-prédicat à une place, adjectif-relation à trois places, et substantif.

Histoire et genèse

C'est au cours de son histoire personnelle et de son expérience du monde matériel et culturel que l'individu construit son répertoire de schèmes et de ressources conceptuelles. Elles peuvent être explicites, implicites, voire inconscientes. Qui dit histoire, dit contingence. La contingence fait donc partie des conditions du développement. Mais cela ne signifie pas pour autant que le développement de la connaissance serait pure contingence. En effet en reprenant à son compte les propriétés et relations qu'il est amené à saisir, soit avec l'aide d'autrui, soit par son activité propre, le sujet individuel conduit une activité de rapprochement, de distinction et de réflexion, qui lui permet de former des systèmes conceptuels relativement articulés. Un champ conceptuel ne se forme pas d'emblée avec toutes les propriétés de la connaissance élaborée, mais progressivement et par morceaux, de telle sorte que, à chaque moment, c'est d'un système de concepts, de situations de référence et de schèmes que dispose le sujet apprenant, élève ou professionnel en formation. La genèse a d'autres propriétés que l'histoire, et le développement de la connaissance mérite donc d'être analysé, dans ses continuités et ses ruptures.
Forme opératoire et forme prédicative sont l'objet de certaines régularités et, dans tout champ conceptuel, on peut mettre en évidence certaines relations d'ordre concernant la complexité

relative des compétences et des conceptualisations sous-jacentes. Cet ordre n'est pas un ordre total, en ce sens qu'il existe éventuellement des inversions de la difficulté relative de deux compétences, selon les sujets et selon l'histoire de leur apprentissage. Il faut probablement abandonner le modèle d'un ordre total entre stades de développement, ou en tous cas le regarder avec circonspection : il a conduit à beaucoup de simplifications, comme la réduction des opérations de pensée à la logique, ou encore au progrès de certaines fonctions exécutives comme la mémoire de travail. Par rapport à l'ordre total, la structure d'ordre partiel ne respecte pas la propriété de connexité, laquelle dit que, de deux compétences A et B, on doit pouvoir décider laquelle précède l'autre, ou est nécessaire à l'autre. Si c'est un ordre partiel qui organise le développement, cela signifie qu'on peut constater soit A avant B, soit B avant A. L'ordre total ne peut donc être satisfait, ni dans des domaines d'activité différents, ni même dans un champ conceptuel relativement circonscrit comme par exemple les structures additives : dans le meilleur des cas on observe un ordre partiel. C'est déjà une régularité précieuse pour une théorie du développement.

Conscience et prise de conscience

Les prises de conscience qui jalonnent le développement de la pensée sont d'une grande variété puisqu'elles concernant les différences et les ressemblances entre objets de nature très différente : situations, propriétés et relations, perçues ou imaginées, conditions, schèmes, propriétés et relations de schèmes entre eux… Ces prises de conscience peuvent être brusques et surprenantes pour celui qui les vit en lui-même comme une inspiration venue on ne sait d'où, mais elles peuvent aussi résulter d'un processus de mûrissement, se dérouler sur une journée ou une nuit, sur plusieurs semaines ou plusieurs mois, éventuellement sur plusieurs années. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

La prise de conscience est analysée comme un changement de point de vue, comme la prise en considération d'objets et de relations jusque là peu aperçus, ou encore comme la coordination de plusieurs points de vue ou de plusieurs relations et propriétés. Une question intéressante, rarement abordée, est celle de la forme sous laquelle une prise de conscience se fait jour : le raisonnement métaphorique n'est pas absent de la science et de la rationalité. Ce ne sont pas seulement les poètes et les artistes, ou les patients d'une cure psychanalytique, qui évoquent par métaphore des aspects du monde qui, sans cela, resteraient inaperçus, ou inconscients. L'histoire des sciences montre que la pensée des savants est pleine d'associations métaphoriques, qui peuvent rester lettre morte, mais qui peuvent aussi opérer des rapprochements suggestifs et préparer une nouvelle conceptualisation. Les ouvrages de Bachelard (la psychanalyse du feu, l'eau et les rêves…) peuvent être salués comme une entreprise originale, et exceptionnelle par rapport aux entreprises rigoristes de certains autres philosophes des sciences.

Un autre processus intéressant est celui que Vygotski exprime avec l'idée de reprise, qui est un processus métacognitif en fait. Vygotski cite Goethe : « qui ne connaît pas une langue étrangère ne connaît pas sa propre langue ». De cet aphorisme Vygotski tire deux idées distinctes pour les rapports entre langue orale et langue écrite: d'une part on n'apprend pas la langue écrite comme on apprend la langue orale, d'autre part l'apprentissage de la langue écrite conduit à faire retour sur la langue orale, et permet d'en découvrir des propriétés encore peu aperçues. Faire deux langues différentes de l'oral et de l'écrit est peut-être un peu excessif, mais en même temps les constituants et la fonction de l'une et de l'autre sont distincts : la langue écrite représente à la fois les sons de la langue orale et le sens : la représentation directe du sens l'apparente alors à une langue spécifique à part entière.

Les remarques de Vygotski sur l'idée de reprise trouvent aussi leur intérêt dans l'étude des rapports entre certains contenus de connaissance, par exemple entre arithmétique et algèbre, entre musique et solfège, entre langues différentes.

Le cas de l'interlangue

Un cas remarquable de développement est justement celui de l'apprentissage d'une langue étrangère, et du phénomène d'interlangue auquel il donne lieu. L'interlangue est la forme particulière que prend la compétence linguistique de l'apprenant dans une langue cible à un moment ou un autre de l'évolution de son apprentissage de cette langue cible. Du point de vue phonologique, du point de vue lexical, et du point de vue syntaxique, l'interlangue est un compromis personnel entre les caractères de la langue source et ceux de la langue cible. Dans sa thèse Jorge Giacobbe avait étudié l'interlangue entre l'espagnol et le français chez des immigrés argentins au moment de la dictature militaire en Argentine. Ces immigrés ne connaissaient pas le français avant d'arriver en France ; Giacobbe les met en situation de raconter un épisode d'un film après plusieurs mois ou plusieurs années de leur séjour en France, et il relève les formes de moins en moins approximatives de leur performance en français. Plusieurs résultats sont clairs : la longue durée du processus d'appropriation d'une nouvelle langue, son inachèvement (les sujets conservent jusqu'au bout certaines formes personnelles dont ils ne parviennent pas à se débarrasser), l'évolution des compromis entre langue source et langue cible sur les trois plans phonologique, lexical et syntaxique. Ainsi le répertoire de schèmes acquis dans la langue maternelle est utilisé et amendé au cours de l 'apprentissage de la nouvelle langue, exemple remarquable de la fonction d'assimilation et d'accommodation des schèmes.

C'est Piaget qui a le mieux mis en avant le concept de schème, introduit par Kant un siècle plus tôt, lequel ne cherche guère à l'illuster. Le choix de Piaget est un choix théorique qu'il faut saluer. Piaget a aussi réfléchi abondamment sur la prise de conscience, en concentrant ses réflexions sur le processus de l'abstraction réfléchissante par rapport à l'abstraction simple. Ce faisant il est proche de Vygotski, mais sa conception de l'abstraction réfléchissante le tire davantage vers la mise en rapport des propriétés de l'action avec les propriétés des objets, que vers l'idée vygotskienne de reprise. Dans les pratiques de formation professionnelle visant à améliorer l'efficacité de l'apprentissage par une séance de débriefing succédant à l'activité en situation, ou par une « autoconfrontation » du sujet avec sa propre activité (simple ou croisée) on apprécie concrètement le poids de la réflexion après coup sur l'activité.

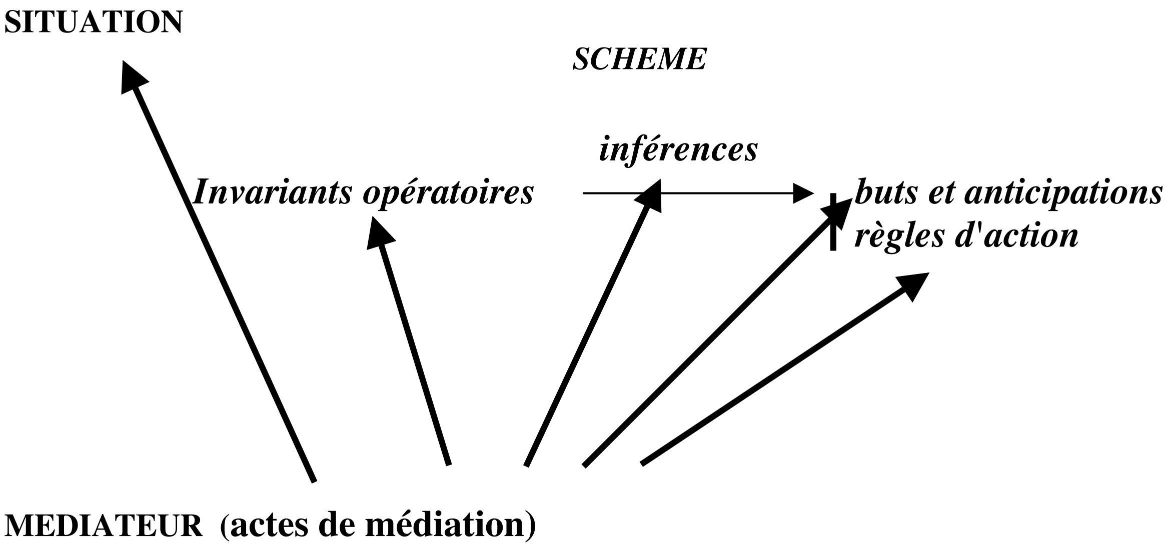
Les schèmes sont souvent efficaces, mais ils peuvent aussi engendrer l'erreur. On ne peut guère espérer éliminer les erreurs, sans un contrôle réflexif, qui comporte toujours une part métacognitive. C'est justement en poussant le contrôle jusqu'à ses limites métacognitives, et en procédant à l'analyse exhaustive des conditions qui peuvent se présenter, que les hommes ont pu dégager des algorithmes, c'est-à-dire des formes d'organisation de l'activité « effectives », c'est-à-dire aboutissant en un nombre fini de pas. Les schèmes sont souvent efficaces, pas toujours ! les algorithmes sont des schèmes « effectifs », dont l'effectivité est démontrable.

Les processus de médiation

Vygotski peut à juste titre être considéré comme le psychologue qui a le plus clairement insisté sur le rôle de médiateur de l'adulte dans les apprentissages de l'enfant. La zone de proche développement n'est-elle pas définie par « ce que l'enfant peut faire avec l'aide de

l'adulte et qu'il ne peut pas encore faire seul ». A la lumière des idées développées dans le présent ouvrage, on peut compléter l'analyse de plusieurs manières :
Si le schème est composé de buts et sous-buts, de règles d'action, de prise d'information et de contrôle, d'invariants opératoires et d'inférences, l'aide de l'adulte va pouvoir porter sur les unes ou les autres de ces composantes du schème. La clarification des buts et sous-buts est essentielle dans le processus de « dévolution » à l'élève, d'un problème qui lui est proposé par l'enseignant alors que l'élève n'est pas toujours en mesure de s'approprier ce problème comme un problème pour lui. Ce processus, sur lequel Brousseau a insisté, est effectivement essentiel, comme sont essentielles les aides locales apportées à l'action, à la sélection de l'information pertinente, au contrôle, et aux inférences possibles. On ne rendra jamais assez justice à Bruner d'avoir distingué et caractérisé de manière lapidaire les différentes fonctions de l'étayage : enrôlement, réduction des degrés de liberté de l'action de l'enfant de manière à simplifier sa tâche, maintien de l'orientation, contrôle de l'activité et de la frustration, signalisation des caractéristiques déterminantes, modelage.

On peut ajouter que l'aide à la conceptualisation est aussi une aide essentielle ; elle intervient à la fois au cours de l'activité elle-même, notamment dans l'aide à la sélection de l'information pertinente, et au cours des phases de réflexion après coup, qui établissent un rapport entre les propriétés de l'action et les propriétés des objets.
Mais le premier acte de médiation de l'enseignant réside dans le choix de la situation elle-même puisque ce choix s'alimente d'une part à la culture et à son épistémologie, d'autre part à la représentation que se fait l'enseignant, de la marge des difficultés accessibles à l'élève : la zone de développement proximal.
On peut alors dresser un nouveau schéma des actes de médiation de l'enseignant :



Conclusion

C'est en considérant l'activité et les formes d'organisation de l'activité qu'on peut établir le plus clairement les parentés et les différences entre instincts, schèmes, habitus et algorithmes. C'est de cette manière aussi qu'on peut le mieux comprendre, dans le développement, les rôles respectifs et complémentaires de la culture, de l'activité personnelle et de la médiation par l'adulte. La réflexion est elle-même une activité. Elle fait partie intégrante de l'expérience, et procède d'un genre particulier qui vient court-circuiter certains processus à long et moyen terme.

Chapitre 8 La représentation

Vouloir se débarrasser du concept de représentation, comme l'ont fait les behavioristes, sous prétexte que l'observateur extérieur n'a pas accès à la représentation d'autrui, ni a fortiori des bébés ou des animaux, est probablement la plus grande sottise de l'histoire de la psychologie

Davantage qu'une sottise, on peut dire que c'est un « contresens » scientifique, puisque c'est abandonner l'ambition même de la science, qui est de comprendre le réel, que celui-ci soit directement observable ou non. Le terme de « crime » est parfois utilisé pour parler des interdictions religieuses ou politiques contre la science ; on pourrait l'utiliser aussi pour parler des obstacles idéologico-théoriques opposés par Hull et ses partisans aux élèves de Tolman à l'époque de la querelle Hull-Tolman dans les années 1930/40.

Dans le présent ouvrage au contraire, le concept de représentation est considéré comme un concept central. Avec celui d'activité, il irrigue la psychologie, à la manière dont les concepts de force et d'énergie irriguent la physique, ou les concepts de cellule et d'évolution irriguent la biologie. Les chapitres précédents contiennent les exemples utiles à l'analyse présentée dans ce chapitre, laquelle est de ce fait synthétique et théorique.

Quatre composantes distinctes, complémentaires entre elles et non indépendantes l'une de l'autre, permettent de donner du sens au concept de représentation :

1 la conscience : flux de la conscience, prise de conscience, retour réflexif ;
2 les systèmes de signifiants/signifiés : langage et autres systèmes symboliques ;
3 les invariants opératoires, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte ;
4 les schèmes d'organisation de l'activité.

C'est en considérant les processus psychologiques individuels que l'on peut donner le sens le plus concret à ces composantes. Par extension aux collectifs et aux communautés, ces processus concernent aussi la culture ; mais la psychologie ne doit pas minimiser son intérêt privilégié pour les individus, même lorsque, dans l'éducation et le travail, on a à faire de manière essentielle à des communautés et à des interactions entre individus.
Le flux de la conscience d'abord est individuel, et c'est par métaphore qu'on peut parler de conscience collective. Les schèmes également sont individuels, en dépit de l'existence de pratiques socialement partagées. Les invariants opératoires sont des composantes des schèmes, et sont donc aussi sensiblement différents d'un individu à l'autre, même s'ils sont, comme le reste, sous l'influence de la culture. En outre les catégories avec lesquelles est pensé le réel varient d'une culture à l'autre, et pas seulement en fonction de la langue

Parmi les quatre composantes de la représentation identifiées ci-dessus, les systèmes de signifiants/signifiés sont probablement le moins mal partagés : une langue fait toujours partie d'une culture. Il en va de même d'un système symbolique comme le code de la route, le dessin d'architecture, le système de numération ou l'algèbre. Cela ne signifie pas pour autant que les individus donnent le même sens aux mêmes signifiants. En outre, comme certains signifiants devenus culturels ont fait initialement l'objet d'inventions personnelles, notamment dans la science et dans l'art, on ne doit pas opposer le culturel à l'individuel

1 la conscience

La question de la conscience est évidemment essentielle pour la psychologie, à la fois parce que la psychologie des états et des processus de conscience a pesé lourd au cours de l'histoire de la psychologie, mais aussi et surtout parce qu'on ne peut pas faire abstraction du rôle de la prise de conscience dans la conceptualisation du réel. L'identification soudaine d'une relation jusque là peu aperçue est attestée par de nombreuses observations dans les ouvrages de psychologie de l'invention et dans les recherches sur la résolution de problème : entre le « euréka » d'Archimède dans sa baignoire, le « ah !ah ! erlebnis » des gestaltistes, les témoignages de certains scientifiques sur les circonstances singulières de leurs découvertes (Poincaré, Hadamard), on est frappé par le caractère soudain de la compréhension d'une relation ou d'un phénomène.
Mais on sait aussi que cette illumination est précédée d'une période, éventuellement très longue, d'interrogations et de réflexions, d'essais infructueux et d'hypothèses peu rationnelles : gageons qu'Archimède, longtemps avant de donner une formulation mathématique à son principe, avait effectué des expériences d'inspiration et d'expiration dans sa baignoire, et découvert ainsi que son corps flottait mieux lorsque la cage thoracique était plus volumineuse. Il faut donc avoir à l'esprit la longue durée que peut prendre un processus de prise de conscience, comme cela est le cas dans l'histoire de certaines découvertes scientifiques et dans les processus d'apprentissage, et d'ailleurs comme cela est le cas dans l'expérience ordinaire de tout un chacun.
La prise de conscience peut donc s'effectuer à la fois dans la soudaineté d'une réorganisation des idées, et dans le temps long de l'expérience et du mûrissement. Sur la longue durée du processus de prise de conscience, on peut évoquer, parmi les exemples à l'esprit de tous, la longue durée de la cure psychanalytique, ou encore la lente formation de la conscience de classe des ouvriers lors de la première révolution industrielle. Dans cet ouvrage, et sans qu'on sorte du cadre de l'expérience scolaire, nous avons montré que l'appropriation d'un champ conceptuel comme les structures additives peut demander une dizaine d'années : entre les premières acquisitions et les plus tardives,. Les durées de mûrissement des idées et des compétences chez les adultes sont du même ordre, voire plus longues encore, au point que certains individus ne parviennent jamais à les acquérir. L'expertise est un bon exemple, puisque certains experts ne deviennent experts qu'après 10 ou 15 ans d'expérience, et que certains de leurs collègues, ayant eu une formation initiale et une expérience professionnelle comparables ne deviennent jamais experts.

En même temps qu'il existe des processus de prise de conscience, donc de modification du contenu de la représentation, le psychologue doit être attentif aussi au fait qu'il existe un flux quasi permanent de la conscience ordinaire, dont témoignent en premier lieu la perception, l'imagination, le rêve et la rêverie. Une conséquence théorique importante est que la perception fait partie intégrante de la représentation. On a parfois abusivement réservé le terme de « représentation » à l'imagination et à l'évocation des objets en leur absence. On peut le comprendre puisqu'il s'agissait alors de montrer l'existence de la représentation chez des êtres réputés ne pas disposer de cette fonction, comme les nourrissons étudiés par Piaget dans *La naissance de l'intelligence*, C'est pourtant la perception qui conduit à considérer comme centrale, dans les fonctions de la représentation, l'identification des objets, de leurs propriétés et de leurs relations. Ainsi la prise de conscience et le flux ordinaire de la conscience sont deux bonnes raisons d'étudier la représentation.

Mais il faut aussi faire sa place, avec Vygotski et Piaget, à un troisième processus, pas totalement réductible aux deux premiers, le retour réflexif. S'inspirant d'une remarque de

Goethe sur l'apprentissage d'une langue étrangère : « qui ne connaît pas une langue étrangère ne connaît pas sa propre langue »,Vygotski avance l'idée que l'apprentissage de la langue écrite, tout en étant très différent de l'apprentissage de la langue orale, s'appuie sur le retour réflexif opéré par l'apprenti sur les propriétés de la langue orale, en même temps que, réciproquement, la connaissance de la langue écrite permet d'approfondir l'analyse des propriétés de la langue orale. Chez Piaget, le retour réflexif porte plutôt sur les relations entre les propriétés de l'action sur les objets et les propriétés des objets eux-mêmes. Ce processus fait aujourd'hui l'objet d'une méthodologie relativement systématisée en psychologie ergonomique et en didactique professionnelle,, notamment avec les techniques dites d'auto confrontation.

On sait bien que la conscience n'épuise pas, loin de là, le concept de représentation. C'est ce que nous allons voir maintenant, avec trois autres composantes. Le langage et les systèmes symboliques, les invariants opératoires, les schèmes.

La fonction de représentation du langage naturel et des systèmes symboliques

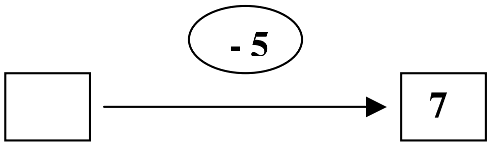
La première fonction du langage est la communication dans une communauté, à commencer par la communauté familiale, pour le bébé et le jeune enfant. Les processus langagiers interviennent toujours dans des situations auxquelles participent à la fois l'adulte et le bébé. La référence aux objets et aux actions matérielles ne peut être qu'essentielle dans les premières constructions du sens des mots, des énoncés, et des expressions. Si le réel n'est pas fait que d'objets, de propriétés et de relations, mais aussi de situations et de processus, objets de pensée relativement moins saisissables, alors il doit exister des formes langagières qui correspondent d'une manière ou d'une autre à ces situations et processus. Encore faut-il les identifier ! Nous avons besoin de toute la sagacité des linguistes pour nous aider à le faire, sachant que, pour l'instant, on connait mieux les formes lexicales que les marques accompagnant les enchaînements syntaxiques et les inférences, avec une exception peut-être pour ceux concernant certains enchainements bien repérés comme les syllogismes hérités d'Aristote, ou encore certains raisonnements devenus classiques en mathématiques comme la transitivité et la récurrence.

Il n'existe pas de communication sans représentation, même si la représentation de l'énonciateur et celle du destinataire de l'énoncé ne sont pas les mêmes. Mais la fonction de représentation du langage naturel est seconde par rapport à celle de communication, tandis que, dans certains systèmes symboliques comme l'algèbre ou les graphiques, c'est la fonction de représentation qui est première, laquelle permet justement de mieux saisir les processus à l'œuvre dans les raisonnements, puisque les utilisateurs de ces systèmes placent au centre de leurs préoccupations, les relations entre objets et entre relations.
L'histoire des mathématiques fournit de beaux exemples de contribution des symbolismes à la représentation opérationnelle des situations, des raisonnements, et des relations entre un problème et sa solution. Un ses meilleurs exemples historiques est probablement la publication par Descartes en 1637 de son ouvrage de géométrie. L'algèbre d'aujourd'hui reste très proche du système de signifiants/signifiés retenu alors par Descartes.
Contentons-nous de revenir sur certains exemples élémentaires vus plus haut. Dans le cas de la transformation d'un état initial par diminution ou augmentation, la recherche de l'état initial est nettement plus difficile pour les élèves que la recherche de l'état final ou de la transformation.

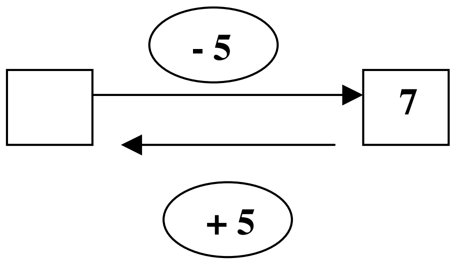
Robert vient de perdre 5 billes. Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

Ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre 3, le schéma fléché permet de saisir mieux que tout autre système de signifiants la relation entre la représentation de la situation et la solution.

La situation



La relation entre la solution et la situation



Un autre bon exemple est celui de la double proportionnalité (chapitre 5): *quelle dépense pour le séjour de 7 personnes pendant 14 jours dans une résidence où il faut payer 45 euros par jour et par personne ?*

Personnes / jours	1	7
1	45	
14		x

Cette représentation graphique utilise l'indépendance des deux dimensions de l'espace, pour représenter les deux proportionnalités distinctes de la dépense par rapport au nombre de personnes et par rapport à la durée du séjour.

Un troisième exemple, culturellement universel aujourd'hui, est celui de la numération de position, héritée des Arabes et des Indiens : la position respective des unités, des dizaines, des centaines … et des dixièmes, des centièmes …permet de s'appuyer sur les positions dans l'espace pour conduire les calculs dans l'ordre, et opérer les retenues au moment opportun, en allant des plus petites unités vers les plus grandes.

Dans les trois cas que nous venons d'évoquer, les propriétés spatiales du système de signifiants sont essentielles ; mais nous avons besoin aussi de spécifier à chaque fois quelles propriétés du signifiant spatial représentent quelles propriétés du signifié. Si cette correspondance n'est pas suffisamment pensée et pesée, les symbolismes peuvent conduire à de mauvais raisonnements : par exemple, la proportionnalité peut souvent être représentée par des tableaux faits de colonnes, ou de lignes, toutes parallèles entre elles, comme c'est le cas pour des quantités de marchandises, leurs poids et leurs prix. Les expériences didactiques montrent que les élèves, au niveau du collège ou du lycée, tentent souvent d'utiliser le même système de colonnes parallèles pour représenter la double proportionnalité, comme celle du prix à payer en fonction du nombre de personnes et de la durée du séjour que nous venons de voir. Ils échouent, évidemment, parce que les deux variables *nombre de personnes* et *durée du séjour* ne sont pas proportionnelles l'une à l'autre.

L'algèbre qu'apprennent les élèves au collège et au lycée se caractérise à la fois par une grande généralité et une grande opérationnalité pour la représentation et le traitement de situations de la vie ordinaire, pour la géométrie, la physique, l'économie. En même temps, elle présente une grande ambiguïté concernant la signification des signes plus et moins : comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, le signe moins peut représenter une diminution, une différence, une inversion, une position négative, une dette, un solde négatif, ce qui conduit les élèves à de grandes difficultés dans les phases de mise en équation des situations, et d'interprétation des opérations et des résultats. Mais ceci n'empêche pas cela : un système symbolique partiellement ambigu peut être totalement opérationnel. Et Saussure nous a appris que signifiants et signifiés ne sont pas toujours dans une relation biunivoque.

Les invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte

Les signifiés de la langue et des systèmes de symboles, ne renvoient pas directement aux objets du réel et à leurs propriétés. C'est dans l'activité en situation que se construit d'abord le sens de ces objets. C'est pourquoi il est indispensable de distinguer entre la forme opératoire de la connaissance et sa forme prédicative, même si ces deux formes sont bien évidemment en relation l'une avec l'autre, et si c'est de la même connaissance qu'il s'agit, en dernier ressort. Il est donc utile de pousser un peu l'analyse des rapports entre les formes progressives de la conceptualisation qui interviennent dans l'action, et les formes progressives de la prédication, sachant que la conscience et la prise de conscience jouent inévitablement un rôle important dans ces deux processus. On a vu dans un chapitre antérieur, avec l'exemple de la symétrie, que la complexité croissante des formes d'organisation de l'activité dans des situations où il fallait dessiner la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe, se doublait d'une complexité croissante des énoncés possibles concernant les propriétés des figures et de la symétrie ; ces deux complexités ne sont pas réductibles l'une à l'autre.

Comment formuler les formes de conceptualisation qui permettent d'expliquer l'efficacité de l'activité en situation ? « La conceptualisation est par définition l'identification des objets, de leurs propriétés et de leurs relations » avons-nous dit plus haut : c'est de cette identification qu'il s'agit, donc de concepts. Mais comme ces concepts peuvent rester implicites, voire inconscients, il est difficile d'utiliser le mot « concept » lui-même, qui renvoie communément à des concepts explicites, situés dans des théories plus ou moins formalisées. D'où l'expression « concept-en-acte », qui justement ne préjuge pas du caractère explicite ou non. Mais la conceptualisation opératoire ne se limite pas à des concepts, pour la bonne raison qu'elle est inférence et calcul, et que les concepts ont une valeur de pertinence, pas de vérité ; la conceptualisation n'est donc pas faite de concepts seulement, mais aussi de propositions, qui sont, elles, susceptibles de vérité et de fausseté. Dans la représentation, le jugement complète nécessairement l'identification pertinente ; d'où l'expression théorème-en-acte, qui désigne une « proposition tenue pour vraie », même si elle n'est pas de l'ordre des mathématiques, et même si elle est fausse. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, la relation est dialectique entre concepts et théorèmes, puisqu'il n'y a pas les uns sans les autres et qu'en même temps on ne doit pas les confondre, la pertinence et la vérité n'étant pas des critères réductibles l'un à l'autre. Il n'ya pas de théorème sans concept, puisque les théorèmes sont

des assemblages de concepts ; mais il n'y a pas non plus de concept sans théorème, puisque les théorèmes sont des propriétés des concepts : sans théorèmes, les concepts ne sauraient être opératoires. L'expression « invariant opératoire » permet de désigner cet ensemble de concepts et de théorèmes qui intervient dans l'activité en situation, et qui permet de faire la différence entre une forme d'organisation de l'activité et une autre, pour la même classe de situations.
Comme les invariants opératoires sont des constituants des schèmes, leur partie la plus proprement épistémique, celle qui reflète les propriétés du réel utilisées dans l'action, on est conduit tout naturellement à envisager que les schèmes eux-mêmes sont des constituants de la représentation.

L'organisation hiérarchique des schèmes et sous schèmes

Cette composante fait de la représentation une fonction éminemment active : la représentation n'est pas une bibliothèque, ni un dictionnaire de formes linguistiques. C'est d'abord un ensemble de schèmes. Contrairement à la thèse première de Vygotski dans « Pensée et Langage » que « le concept, c'est la signification des mots », on est conduit, avec les idées de schème et d'invariant opératoire, à une théorie beaucoup plus large, qui couvre à la fois la conceptualisation explicite et celle qui intervient dans l'action en situation, d'une manière le plus souvent implicite..

Du point de vue neurologique, les schèmes et sous schèmes sont probablement des orbites potentielles d'activité du système nerveux, susceptibles d'être captées lors de la rencontre avec certaines situations ; l'association se fait alors entre certaines propriétés des objets et les buts et invariants susceptibles d'être évoqués. Cette association est plus cohérente que contingente, mais il ne faut pas exclure une certaine contingence dans les processus d'évocation. La surprise est parfois au rendez-vous, la créativité aussi. Et l'irrationalité comme la rationalité.

Pour ce qui est de l'activité rationnelle, il faut établir un lien raisonnable entre d'une part les conceptualisations qui interviennent dans l'action, et qui se développent au cours de l'expérience, et d'autre part les conceptualisations explicites de la science et du discours explicatif, fût-il formulé dans un langage ordinaire peu sophistiqué.
La forme opératoire de la connaissance s'analyse d'abord en termes de schèmes et de situations. La forme prédicative en termes d'énoncés, de textes organisés et de mots (substantifs et prédicats de plusieurs catégories),

Si les deux formes sont celles d'une même connaissance, en dépit de leurs différences, il faut trouver dans les schèmes un équivalent potentiel de la conceptualisation explicite. C'est ce sens d'intermédiaire à double face qu'il faut donner aux invariants opératoires, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. L'expression « à double face » s'explique par le fait que les invariants opératoires renvoient d'un côté aux objets du réel et à leurs propriétés, de l'autre aux signifiés de la langue. Comme les rapports signifiés/signifiants ne sont pas eux-mêmes biunivoques, il faut envisager trois morphismes distincts ; le morphisme réel/invariants opératoires, le morphisme invariants opératoires/signifiés de la langue, et le morphisme signifiés/signifiants. Aucun de ces morphismes n'est un isomorphisme, faute de biunivocité, Mais il s'agit plutôt d'homomorphismes partiels. Comme le réel n'est pas lui-même réductible aux observables, on peut formuler un nouveau principe :

Principe d'homomorphisme partiel, ou principe de Vergnaud
Entre réel et observables
Entre réel (médiatisé par les observables) et invariants opératoires
Entre invariants opératoires et signifiés de la langue
Entre signifiés et signifiants

Pour faire comprendre cette structure fonctionnelle qu'est un homomorphisme, il faut à la fois en donner une définition et des exemples : avant de donner une définition, donnons des exemples et soulignons un bénéfice essentiel : un homomorphisme permet d'économiser certaines opérations, et certains processus de pensée.

Dans la situation de dénombrement des personnes qui se trouvent dans le salon et de celles qui se trouvent dans le jardin (chapitre 1), le schème de l'addition des cardinaux des deux parties, se substitue au schème de recomptage du tout : cette substitution est interprétée comme l'émergence d'un nouveau théorème-en-acte, totalement implicite chez l'enfant . C'est un homomorphisme:

Card (AUB) = Card (A) + Card (B)   si A et B n'ont pas de partie commune.

Il représente une grande économie, puisque, sans lui, le dénombrement de deux troupeaux nombreux (distants l'un de l'autre) demanderait la réunion des deux troupeaux en un seul.

Si maintenant on s'intéresse au symbolisme de la numération de position, on observe un second homomorphisme, celui de l'algorithme de l'addition, avec ses règles concernant la progression des unités vers les dizaines, les centaines etc, et avec ses règles concernant les retenues :

Ecrit (a + b) = Ecrit (a) **+** Ecrit(b)   **+** symbole de l'algorithme

Il représente aussi une grande économie de pensée, si on compare cet algorithme à l'addition (ou à la soustraction) en numération romaine.

La définition de l'homomorphisme coule alors de source : « homo/morphe » = « même forme » ou encore « même structure »
« deux ensembles distincts sont reliés par une correspondance entre les objets de l'un et les objets de l'autre, univoque dans un sens ; et l'opération qui porte sur les objets du second ensemble est le reflet de celle qui porte sur les objets du premier ensemble, de telle sorte qu'il revient au même d'opérer dans le premier ensemble et de prendre l'image ensuite, ou de prendre les images d'abord et de faire ensuite l'opération dans le second ensemble »

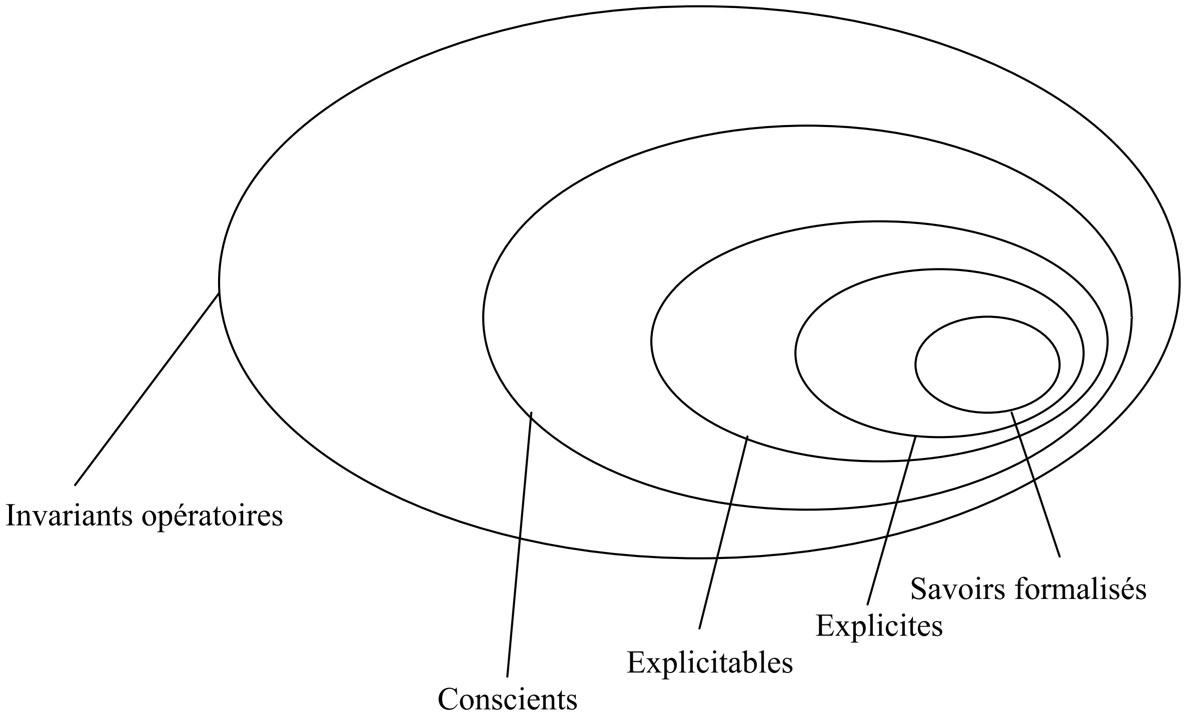
Il faut noter aussi que, entre les observables du réel et les observables que sont les signifiants, les invariants opératoires et les signifiés de la langue et des symboles ne sont pas donnés par les observables. Le concept de cardinal (et de nombre) n'est pas un objet matériel observable, mais résulte d'une construction ; l'addition non plus n'est pas directement observable. Et pourtant l'algorithme de l'addition de nombres écrits en numération de position résulte d'une composition de ces concepts et des deux théorèmes associés :

Card (AUB) = Card (A) + Card (B)   Ecrit (a + b) = Ecrit (a) **+** Ecrit(b)

A et B sont des ensembles,
Ecrit (a) et Ecrit (b) sont des symboles.
a et b sont des nombres (ce sont justement Card (A) et Card (B)) Ils permettent d'enchaîner les deux morphismes.

.

On peut alors résumer par un schéma l'élaboration progressive de la conceptualisation : depuis les invariants opératoire jusqu'aux savoirs formalisés, en passant par les filtres successifs et distincts que sont la conscience, l'explicitation et la formalisation.



Ce ne sont pas seulement les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance qui sont ainsi éclairés, mais aussi certains processus visant à expliciter des connaissances qui ne sont pas spontanément explicites : ces processus sont souvent provoqués par des mises en scène bien repérées aujourd'hui comme les entretiens d'explicitation et les séances d'auto confrontation. Mais la prise de conscience et le langage intérieur peuvent jouer un rôle analogue.

Chapitre 9 En guise de synthèse et de conclusion

Cet ouvrage est bref, trop bref probablement pour certains lecteurs, qui observeront à juste titre que de nombreux points mériteraient d'être plus complètement expliqués ; mais en même temps il présente l'avantage de porter l'attention sur un petit nombre de principes essentiels pour la psychologie et les utilisateurs de la psychologie, et de rendre ainsi visibles les articulations principales de la théorie, laquelle vise, je le rappelle, à donner un fondement à la psychologie des compétences complexes, telles qu'on les rencontre dans l'éducation et le travail. Dans ce dernier chapitre, ces principes sont regroupés autour des thèmes suivants :

l'adaptation et l'activité
le développement à long terme
la rationalité et la conceptualisation
le langage, la communication et les symbolismes
la dialectique

Pour l'essentiel, la présente théorie concerne la relation entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance.

L'adaptation et l'activité

Principe d'adaptation ou principe de Piaget : la connaissance est adaptation
Piaget était biologiste avant d'être psychologue, chacun le sait, et son projet scientifique était d'établir les relations entre biologie et connaissance ; c'est le titre de l'un de ses grands ouvrages. Pour lui l'adaptation comporte deux faces ; l'assimilation du réel et l'accommodation au réel.
Mais qu'est-ce qui s'adapte ? Et à quoi ?
Fondée sur l'approfondissement de l'idée d'activité, la réponse me paraît être aujourd'hui :
Ce qui s'adapte ce sont des schèmes, et ils s'adaptent à des situations.

Ce n'est pas que l'adaptation ne concerne que les schèmes et les situations. Simplement, si ce processus d'adaptation résulte de l'activité, il faut substituer le couple schème/situation au couple stimulus/réponse des behavioristes, qui ne dit rien de l'organisation de l'activité. Du même coup, on se donne les moyens d'analyser un peu mieux la relation du sujet avec le réel, en distinguant des objets d'étude empiriques circonscrits par ceux de situation et de schème.
Chez l'amibe, l'assimilation consiste à prélever dans l'environnement les substances qui lui sont nécessaires ; et l'accommodation à modifier la surface de contact avec le milieu de manière à augmenter et optimiser le rapport entre volume et surface d'échange. Il y a une grande distance entre ce processus d'adaptation primaire et la relation schème/situation, mais on peut soutenir qu'il existe une certaine parenté. Il faut pour cela préciser ce qu'est une situation et ce qu'est un schème.

Le concept de schème
Retenons la définition analytique du chapitre 1 en termes de buts, règles, invariants opératoires et inférences. Ne retenons plus ici les compléments de cette définition ; ajoutons plutôt deux autres idées :

- instrument d'action sur le réel, le schème est aussi un moyen d'interrogation du réel ;
- producteur de l'activité, il en est aussi le résultat et le reflet intériorisé.

Le concept de situation
Une situation n'est ni un stimulus, ni un objet seulement, mais un ensemble d'objets et de conditions, dans lequel on peut identifier à la fois des sources de difficulté (plus ou moins aisément surmontables selon le niveau de développement du sujet), et des ressources (autrui, instruments). Surtout, pour qu'une situation ait un sens et soit une vraie situation, il faut que soient greffées dessus une intention et une interrogation du sujet, c'est-à-dire une problématique, laquelle n'est pas fournie par la seule situation ; le sens suppose une certaine activité du sujet dès la première approche de la situation. Il n'y a pas de situation sans schème. Il n'y a pas non plus de schème sans situation.

A partir de ces définitions liminaires, plusieurs principes peuvent être formulés :

- **principe de généralité**: le concept de schème est pertinent pour tous les registres de l'activité : les gestes, les interactions avec autrui, les raisonnements scientifiques et techniques, les activités langagières et conversationnelles, les émotions et l'affectivité. Pour les besoins de l'analyse, un chercheur peut être amené à concentrer son regard sur l'un ou l'autre de ces registres, mais ils interviennent tous ensemble dans la plupart des situations d'éducation et de travail. Il est souvent fécond de regarder plusieurs registres à la fois. Pour autant, il n'est pas toujours aisé de délimiter clairement la classe de situations à laquelle un schème peut s'adresser. Dans beaucoup de cas les frontières restent floues, justement parce que les schèmes sont flexibles.

- **principe d'intégration temporelle et de totalité**: l'organisation de l'activité peut être analysée, dans la même situation, pour des segments d'une durée très brève ou au contraire relativement longue ; ces segments d'activité ont des fonctions variables. Chaque segment a son intérêt propre, mais les différents niveaux d'analyse ne sont pas en général réductibles les uns aux autres. C'est le schème tout entier qui est fonctionnel. Le geste est un bon exemple de la contribution diachronique et synchronique de ses différentes parties à sa fonctionnalité.
On peut aussi, pour les besoins de l'analyse, s'intéresser plutôt à telle ou telle composante du schème : buts, règles, invariants opératoires, inférences. Mais il serait imprudent d'accorder la fonctionnalité du schème à l'une ou l'autre de ces composantes seulement, par exemple aux règles qui engendrent l'action, la prise d'information et le contrôle, lesquelles assurent la fonction générative du schème, ou encore aux invariants opératoires, qui en sont la composante épistémique. Si décisives que soient ces règles et ces invariants pour identifier les différences entre schèmes, c'est le schème dans sa totalité qui est fonctionnel.

- **principe de variété et de vicariance** : il peut exister plusieurs schèmes pour une même classe de situations, ce qui offre des possibilités de vicariance, et aussi d'adaptation plus ou moins opportune à différents cas de figure. Le même sujet peut mobiliser un schème ou un autre selon les valeurs des variables de situation, il peut aussi privilégier l'un d'eux, par une sorte de biais idiosyncratique ; a fortiori des sujets différents peuvent privilégier des schèmes différents, entre lesquels des équivalences peuvent être reconnues ou non.

Le développement à long terme

Principe d'émergence et de développement : un schème se forme (émerge) dans des conditions locales, c'est-à-dire pour des valeurs propices des variables de situation, et donc pour une classe de situations relativement circonscrite.
Pour que sa portée s'élargisse à une classe plus large (assimilation), le schème doit s'enrichir de diverses façons (accommodation) : par la construction de nouveaux invariants qualitatifs et relationnels (éventuellement par analogie ou métaphore) entre les situations non encore maîtrisées et les situations auxquelles s'adressait le schème déjà formé, ainsi que par l'élaboration d'opérations de pensée et de sous-schèmes complémentaires, qui conduisent en fait à de nouveaux schèmes.
Ce principe intéresse toute la vie, les adultes comme les enfants, et tous les registres d'activité ; au delà des schèmes circonscrits à certaines classes de situations bien identifiées, il s'étend à l'ensemble des pratiques.
Souvent, au cours du développement, un schème l'emporte sur les autres, pour une raison ou pour une autre : sa simplicité, sa meilleure efficacité, sa portée plus large, sa fiabilité, sa meilleure compatibilité avec les schèmes d'autrui ou avec les normes culturelles.

Principe d'économie de l'activité : La formation d'un nouveau schème dépend ainsi de plusieurs critères possibles : rapidité, contrôle, conditions d'exécution, y compris compatibilité avec les schèmes d'autrui. Il appelle toujours une part de construction.
L'apprentissage de la multiplication des nombres entiers suppose la reconnaissance par l'élève qu'il est équivalent de multiplier la valeur unitaire F(1) par n, ou d'ajouter n fois F(1).
Un autre exemple d'économie est celui de la transitivité de la règle de déblocage des barres encastrées les unes dans les autres :

S'il faut tirer X avant Y, et tirer Y avant Z, alors il faut tirer X avant Z.

On économise l'essai concernant X et Z.

Remarquons à nouveau que cette inférence, relativement spontanée chez les enfants de 7 ou 8 ans, porte sur des règles d'action, et non sur les barres encastrées elles-mêmes : la relation d'encastrement n'est pas transitive. Ainsi le raisonnement et la représentation ne concernent pas que les objets et processus extérieurs, observables ou non, mais aussi l'activité du sujet. La représentation de l'activité est décisive. C'est particulièrement nécessaire pour les gestes de la danseuse et du sportif de haut niveau,

Champ d'expérience et champ conceptuel : le développement à long terme résulte principalement de l'expérience ; pour la formation des compétences complexes chez l'adulte et chez l'enfant, la maturation ne joue pas un rôle aussi décisif que chez le jeune enfant. Mais la variété des processus psychologiques qui interviennent dans la formation des compétences conduit à distinguer plusieurs formes de l'expérience : à côté de l'expérience « ordinaire », peu programmée par la société, il existe des formes instituées d'apprentissage : à l'école, dans la famille, dans la vie professionnelle. Il existe aussi des phases organisées de réflexion sur l'activité, dans les stages de formation continue notamment, dont le rôle est souvent différent de celui de l'apprentissage. La réflexion sur les formes d'organisation de l'activité, sur les difficultés rencontrées, sur les rapports entre différents registres et entre différentes phases de l'activité est un enrichissement des pratiques, et par voie de conséquence des schèmes associés aux classes de situations. L'expérience « ordinaire » est incontournable comme source de développement des compétences ; mais le poids des apprentissages institués et de la réflexion est devenu majeur aussi, avec le développement de l'école et de la formation.

L'étude du développement à court et à long terme appelle une réflexion sur les filiations et les ruptures entre compétences, notamment entre les règles qui engendrent l'activité en situation, et entre les invariants opératoires qui permettent de caractériser les différences et les parentés.
Différentes théories des stades se sont adressées à cette question, notamment celle de Piaget, orientée principalement par la description d'opérations logiques de niveau différent, ou encore celle concernant les fonctions dites « exécutives » (attention, mémoire).
C'est à cette question des filiations et des ruptures que s'adresse aussi la théorie des champs conceptuels. Mais elle porte le regard sur le contenu conceptuel des situations et des schèmes, plutôt que sur des caractéristiques générales de la pensée ou de l'activité cognitive. Les exemples décrits dans les chapitres 3, 4 et 5 illustrent certaines des phases qui jalonnent le développement des compétences, pour les apprentissages mathématiques notamment. Mais la conceptualisation concerne tous les domaines d'activité, de telle sorte qu'il est possible d'adopter la perspective des champs conceptuels pour les apprentissages professionnels et d'autres domaines de la vie, pas seulement pour les apprentissages scolaires.
Raisonner sur les situations à proposer aux élèves et aux apprentis est en rapport étroit avec l'analyse des schèmes susceptibles d'être évoqués pour leur faire face.
Loin de s'opposer au concept de champ d'expérience, celui de champ conceptuel permet de le nourrir et de l'éclairer.

Principe de Socrate, ou principe de déconstruction de l'évidence : ce principe permet d'illustrer l'idée de rupture. Il n'y a rien de plus évident pour un sujet que les schèmes qui lui sont familiers, y compris les propositions tenues pour vraies implicitement ou explicitement dans cette activité. « Je sais que je ne sais rien » est donc une manière d'interroger l'évidence, et d'élaborer d'autres conceptions.
L'histoire des sciences illustre remarquablement bien à la fois la croyance non interrogée dans la vérité de ce qui est intuitivement perçu, et sa remise en cause. L'apprentissage aussi. Par exemple le fait que le nombre soit lié, dans ses premiers développements, à l'idée de mesure, a conduit certains mathématiciens à refuser aux nombres négatifs le statut de nombre. Il n'a pas fallu moins de deux siècles, après leur construction, pour que ce statut leur soit reconnu par l'ensemble de la communauté des mathématiciens professionnels. On ne peut être étonné que certains élèves, lorsqu'ils résolvent une équation et qu'ils aboutissent à une solution négative, aient comme première réaction le sentiment qu'ils se sont trompés.

La rationalité et la conceptualisation

Le rapport des sujets humains avec le réel est marqué par l'incertitude. Dans le chapitre 6, nous avons identifié trois principes d'incertitude distincts :
Dans les situations aléatoires, la prédiction certaine d'un événement singulier n'est pas possible : c'est le premier principe.
Dans les situations régulières mais non nécessaires, l'incertitude tient à l'existence des inobservables : c'est le deuxième principe.
Dans les situations nécessaires, l'incertitude tient à l'insuffisance éventuelle du système de catégories avec lequel on saisit les propriétés des observables : c'est le troisième principe d'incertitude.
Dans beaucoup de situations complexes, ces principes d'incertitude interviennent tous les trois à la fois. Par exemple, dans la conduite d'une centrale nucléaire, il existe une part importante d'aléatoire, et la théorie physique utilise d'ailleurs des modèles probabilistes : le premier principe d'incertitude est pertinent. En même temps le conducteur de centrale nucléaire ne peut accéder à certains processus qui se déroulent dans le circuit primaire et dans l'équilibre complexe entre circuit primaire et circuit secondaire : le second principe

d'incertitude est donc pertinent également. Enfin le conducteur peut disposer de théories et de catégories conceptuelles (éventuellement inadéquates ou insuffisantes) pour interpréter les informations sur les observables qui sont à sa disposition : c'est alors le troisième principe d'incertitude qui intervient.
Le tableau est donc beaucoup plus riche et complexe que ne le laisse entrevoir la classification que nous avons présentée dans le chapitre 6 pour parler de la construction initiale de la rationalité chez l'enfant. On peut observer aussi que les phénomènes auxquels le conducteur de centrale nucléaire est confronté relèvent toujours de l'interaction, puisqu'ils résultent à la fois de son action propre, de l'action d'autrui, et de processus sur lesquels il n'a pas de prise. C'est le cas dans la plupart des situations de travail.
Le pilote qui s'apprête à poser son avion se trouve dans une situation analogue à celle du conducteur de centrale nucléaire, en ce sens que l'environnement matériel extérieur de l'appareil et le fonctionnement des instruments de bord comportent une part non négligeable d'aléas et d'inobservables, et qu'en outre le pilote ne dispose pas toujours des moyens de saisir et d'interpréter correctement l'information qui lui est accessible.
Dans sa thèse Jean Claude Audin a étudié la manière dont les pilotes, notamment les pilotes en formation, mettent en œuvre les procédures apprises et les adaptent lorsqu'une situation inattendue se présente, comme le changement de piste d'atterrissage au dernier moment, ou l'atterrissage sur une piste trop courte. Il a observé plus de 700 approches, avec 35 pilotes différents. Il a effectué cette observation in vivo, puisqu'il était présent dans l'appareil à côté du pilote.
L'approche finale, qui précède le contact avec la piste, demande le contrôle de la trajectoire de l'avion (axe de la piste et pente de 3 degrés par rapport au sol), de la vitesse (liée aux conditions de la situation comme le poids de l'avion, le vent, les courants ascendants), de la configuration momentanée de l'appareil (train d'atterrissage, hypersustentateurs). Le point d'aboutissement de la trajectoire est un paramètre décisif, surtout sur une piste courte.
On admet en général que le pilotage de la vitesse s'effectue à l'aide la manette de puissance (les gaz), et le pilotage de la pente par rotation de l'avion autour de l'axe de tangage ; si le pilote entrevoit un risque de raté, il doit remettre les gaz. Mais les pilotes n'aiment pas reconnaître cet échec, qui les oblige en outre à faire une nouvelle tentative. Le schème de l'atterrissage est complexe et implique notamment le jeu entre trois paramètres principaux : pente de la trajectoire, assiette ou ligne d'horizon, incidence ou angle formé par l'avion et la trajectoire.. En outre, et c'est justement un paramètre important du schème d'atterrissage, la vitesse de l'avion ne doit pas être inférieure à 1,3 fois la vitesse de décrochage, théoriquement.
Le contrôle de l'axe et de la pente est effectué visuellement, avec certaines difficultés pour les débutants. Les angles ne sont pas facilement évalués à l'œil. On est typiquement dans le cas d'une organisation perceptivo-gestuelle de l'activité, mais les connaissances techniques et scientifiques en forment un aspect important. Du fait de la faible vitesse, les braquages de gouvernes peuvent induire des effets inattendus comme le roulis de l'appareil et le lacet inverse (variation de la portance de l'aile droite et de l'aile gauche, variation de la traînée, qui entrainent une inclinaison de l'appareil dans la mauvaise direction). Il faut anticiper ces effets possibles, et le pilote doit pour cela évaluer des variables qui ne sont pas directement accessibles. La dimension temporelle des processus (quel délai entre une action et ses effets par exemple) est difficile à évaluer ; l'environnement se transforme au cours d'une même approche ; les relations entre variables sont complexes. Le rôle de l'expérience est évidemment très important dans la maîtrise de l'atterrissage.
Les procédures apprises ont leurs limites ; elles ne sont pas intégralement respectées, et les schèmes personnels des pilotes, surtout des apprentis, pêchent souvent par lacune, ou réussite partielle ; à l'inverse, certains pilotes chevronnés recourent à des schèmes différents des

procédures recommandées, notamment en descendant à des vitesses inférieures à 1,3 la vitesse de décrochage, et posent cependant leur appareil dans des conditions confortables. Ainsi la maîtrise de l'atterrissage peut reposer sur un respect scrupuleux de la norme, soit au contraire sur un écart significatif parfaitement contrôlé par le pilote. Cette liberté de jugement et d'action ne se rencontre que chez les pilotes expérimentés.
Déjà dans le cas d'une approche normale, les réussites totales (avec respect de la procédure) ne concernent que 7 pilotes, les réussites partielles 17 pilotes, les réussites avec schèmes et paramètres personnels 6 pilotes. Seuls 5 pilotes échouent, ayant tous une expérience relativement courte (70 heures de vol en moyenne). Ceux qui échouent se caractérisent notamment par une faible capacité d'anticipation, une forte implication dans l'action (atterrir à tout prix), une difficulté à prendre les informations pertinentes, également par des connaissances fragiles, et peu d'inférences.
Mais c'est dans les deux situations de changement de piste, et d'atterrissage sur une piste trop courte que les différences entre schèmes sont le plus visibles. Ainsi les pilotes qui utilisent des paramètres personnels réussissent-ils mieux, et se donnent-ils des objectifs moins étroitement liés à la norme (tenir la trajectoire, réduire la vitesse, l'énergie cinétique et le roulage) alors que les pilotes plus respectueux de la procédure recommandée s'en tiennent davantage à la tenue des paramètres indiqués et prêtent moins d'attention aux données visuelles et au vent. La relation vitesse/portance/traînée/incidence est ainsi contrôlée à la fois par des connaissances techniques et théoriques, et par des gestes dépendant étroitement des informations visuelles et kinesthésiques (celles du corps et de l'appareil en mouvement). C'est dire que la conceptualisation joue un rôle à plusieurs niveaux. On peut même s'appuyer sur des observations comme celle de l'atterrissage pour comprendre la parenté des conceptualisations perceptivo-gestuelles et des conceptualisations scientifiques, à l'évidence plus analytiques. Les schèmes sont nourris par les deux formes ou niveaux de conceptualisation ; les invariants opératoires sur lesquels repose l'organisation de l'activité en situation peuvent être explicites et même formalisés, tout en étant aussi, pour une part d'entre eux, implicites, voire faiblement conscients.

Principe de conceptualisation : il n'y a pas d'activité opératoire sans l'identification au moins partielle des objets du monde, de leurs propriétés, de leurs relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi directe, ou d'une construction.
Même si le concept de situation est premier pour une psychologie reposant sur l'activité, on a inévitablement besoin du concept d'objet, en entendant par « objets » non seulement les objets matériels directement perceptibles et identifiables, mais aussi leurs propriétés et relations fonctionnelles, puisque c'est sur ces relations que repose l'efficacité de l'activité. Au cours du processus de conceptualisation, des objets de pensée très différents émergent, comme c'est le cas dans les communautés professionnelles (les concepts de charge et d'équilibre chez les tailleurs de vigne), et dans les communautés scientifiques (les concepts de système et de structure, de fonction et de variable chez les mathématiciens).

Cette conceptualisation, indispensable à l'action en situation, a fait l'objet de la réflexion de nombreux psychologues. Vygotski pour sa part utilise un langage original pour en parler : « la conscience avant », par différence avec « la conscience après » qui est pour lui un retour réflexif sur l'activité. Piaget, lui, distingue entre « réussir et comprendre » (c'est le titre d'un de ses bons ouvrages). Mais ni l'un ni l'autre ne parvient à fournir un théorie des rapports entre la conceptualisation pour faire et réussir, et la conceptualisation pour « comprendre ». Le principe théorique crucial me paraît être qu'il existe deux formes de la connaissance : la forme opératoire, qui permet d'agir en situation, et la forme prédicative, qui permet d'énoncer

les propriétés des objets et d'élaborer des systèmes conceptuels explicites, relativement cohérents. L'autre idée importante est qu'il s'agit de la même connaissance, et qu'il existe des liens entre les deux formes, même si leur portée et les conditions de leur manifestation sont différentes.
Le concept d'invariant opératoire, avec les deux faces que sont les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte, est justement ce lien puisque les invariants opératoires sont les équivalents cognitifs dans l'action, des formes prédicatives de la conceptualisation. Ils peuvent être explicites (ou explicitables) bien entendu, mais ils sont souvent implicites, soit qu'il s'agisse d'une prise de conscience non verbale, soit qu'ils résultent d'une intériorisation débarrassée de l'explicitation voire de la conscience.
Pour l'observateur qui cherche à caractériser ces invariants opératoires, et par là à identifier les différences entre schèmes, l'enjeu est de trouver les formulations les plus justes, même si elles sont empruntées à la forme prédicative. C'est délicat ! Mais cette analyse permet d'être relativement précis, de différencier les schèmes entre eux dans le même champ conceptuel, et de faire le lien avec la forme prédicative de la connaissance.

Concernant la conceptualisation, plusieurs principes ont été évoqués dans les chapitres précédents, qui méritent d'être rappelés ici :

Principe d'information lacunaire ou principe de Platon : le réel ne nous fournit pas tous les observables qui nous permettraient de le comprendre. Seule une partie nous est accessible.
Dans le mythe de la caverne, Platon met en évidence le fait que le réel n'est pas seulement dans les phénomènes apparents que sont les ombres sur le fond de la caverne. Cela aurait pu le conduire au constructivisme, puisqu'il faut alors élaborer des concepts hypothétiques pour rendre compte des observables. Malheureusement Platon a adopté une autre épistémologie, celle de la rencontre avec les idées pures. Il ne dit pas d'où elles viennent, faute d'une attention suffisante au rôle de l'expérience.

Un autre principe est le suivant, qui n'est pas toujours différencié du principe de Platon :

le principe d'utilisation partielle de l'information : l'information pertinente disponible n'est pas toute utilisée, ni toujours bien utilisée. L'information utile peut ne pas être sélectionnée, faute des catégories de pensée adéquates pour cela ; elle peut aussi être mal interprétée ; et les informations non pertinentes peuvent être sélectionnées en lieu et place des pertinentes. La différence d'avec le principe de Platon tient au fait que le décalage entre réel et observables et le décalage entre ce qu'il serait pertinent d'utiliser et ce qui est effectivement utilisé sont distincts. L'expérience des barres encastrées est l'occasion de voir la différence entre ces deux décalages chez l'enfant.

De ces deux principes résultent plusieurs autres :

Principe de rationalité partielle : on peut comprendre partiellement un système ou un champ conceptuel : la connaissance ne fonctionne pas en tout ou rien.

.
Principe de construction : le besoin de rationalité appelle la construction de concepts et de théorèmes (explicites ou en acte seulement) permettant de rendre compte des observables. Ces constructions sont éventuellement si hypothétiques, qu'elles peuvent heurter le sens commun. L'histoire des sciences en offre des cas exemplaires.

Principe d'inférence : Un exemple simple d'inférence dans l'activité est celui de la transitivité de la règle « tirer X avant Y » que nous avons vu à propos de l'expérience avec les barres encastrées (chapitre 6). Mais le principe d'inférence est très général puisque c'est le moyen ordinaire par lequel sont déterminés, à partir des propositions tenues pour vraies (théorèmes en acte) les autres constituants du schème que sont les buts et les règles d'action, de prise d'information et de contrôle.

L'expérience des barres encastrées permet de saisir des phénomènes originaux sur le développement relativement spontané de la rationalité chez l'enfant. Tout n'est pas culturel dans la rationalité, y compris dans les mathématiques, bien que celles-ci jouent un rôle particulier dans son développement. L'expérience montre que la rationalité n'est pas une propriété de la forme prédicative seulement, mais se développe aussi dans l'action en situation. Elle se développe d'abord pour les situations nécessaires, dans lesquelles le sujet a un accès suffisant aux observables pour être en mesure de prendre et d'utiliser l'information pertinente, et d'agir à coup sûr.
Elle s'étend aux situations régulières, puis aléatoires, à condition qu'une certaine théorisation, plus ou moins hypothétique, en soit élaborée. Est important le fait que les événements qui se produisent sont totalement, partiellement, ou pas du tout sous le contrôle du sujet.

Il faut donc distinguer entre nécessaire concret et nécessaire abstrait, ou construit :
nécessaire concret : l'information pertinente est directement et totalement accessible au sujet, du moins à un certain niveau de son développement cognitif .
nécessaire abstrait ou construit : l'information pertinente ne lui est pas directement accessible ; la nécessité dépend alors de la représentation hypothétique que le sujet se fait de la situation. Souvent cette représentation hypothétique est fournie par la culture ! tant il est vrai que la science élaborée au cours des siècles nous fournit la plus grande part de nos représentations théoriques.

catégories de base

Dans le processus de conceptualisation du réel, n'interviennent pas que des conceptualisations circonscrites à des champs conceptuels particuliers, mais aussi des catégories de base relativement générales comme celles de différence, de ressemblance, d'équivalence, d'ordre, de mesure, de nombre, de structure, de système, de comparaison, de composition … et celles auxquelles nous avons accordé une certaine importance dans le présent ouvrage : objet, propriété, relation, transformation, qualité, usage. Comme on ne peut pas raisonnablement espérer analyser le développement cognitif avec ces seules catégories de base, il faut aller plus loin dans le détail de l'analyse. C'est la principale raison du cadre théorique des champs conceptuels.

Langage, communication et systèmes symboliques

Le langage stabilise les invariants opératoires et en fait un bien plus ou moins partagé par la communauté dans laquelle ces invariants sont pertinents. C'est ainsi que, formulés, les invariants deviennent **des concepts pragmatiques** (selon l'heureuse expression de Pierre Pastré), à l'étude desquels la psychologie du travail, l'ergonomie, et la didactique professionnelle s'intéressent.

Le principe premier concernant le langage et les symbolismes est celui de correspondance systémique signifiants/signifiés ou **principe de Saussure** : les signifiants forment des systèmes et des sous-systèmes, les signifiés aussi : d'où l'idée de correspondance systémique et non terme à terme. Dans le chapitre 2, nous avons donné l'exemple élémentaire des systèmes permettant d'exprimer les relations temporelles en anglais et en français.

Cette idée de système rend peu féconde, dans beaucoup de cas, la recherche des traductions mot à mot entre langues, et des correspondances biunivoques entre signifiés et signifiants. Mais cela ne conduit pas à abandonner la préoccupation de rechercher quelles propriétés du système de signifiants représentent quelles propriétés du système de signifiés, notamment lorsque la fonction de représentation des objets et de leurs relations est essentielle, comme dans les exemples de la droite numérique, des schémas sagittaux, des tableaux, ou de l 'algèbre. Nous avons vu alors que la valeur des signifiants repose sur des conceptualisations non négligeables, et que ces symbolismes ne sont pas transparents.

Les processus de formulation et de symbolisation, sont ainsi la source de décalages, qui s'ajoutent aux décalages associés aux classes de situations et aux schèmes. La science n'est pas seulement et pas totalement une langue bien faite. Il faut donc faire une place, dans la théorie des champs conceptuels, à la fois aux écarts entre signifiés et signifiants, aux écarts entre réalité et invariants/concepts, et aux écarts entre invariants et signifiés/signifiants.

D'où **le principe de quadruple homomorphisme partiel** :
Entre réel et observables
Entre réel (médiatisé par les observables) et invariants opératoires
Entre invariants opératoires et signifiés de la langue
Entre signifiés et signifiants.

Nous parvenons ainsi à faire leur place, dans la même théorie, tout en les distinguant soigneusement, à la forme opératoire et à la forme prédicative de la connaissance.
Il existe une véritable dialectique entre ces deux formes d'expression de la connaissance, tout en conduisant à deux sens du concept de « représentation calculable » : d'une part sans signes et symboles représentant les objets, d'autre part avec signes et symboles comme appuis du jugement et du raisonnement. Il ne faut nier l'importance ni de l'une ni de l'autre, ni croire aux bienfaits de l'une aux dépens de l'autre. Il n'y a pas davantage de correspondance biunivoque entre énoncés et propositions tenues pour vraies dans l'activité, qu'il n'y en a entre schèmes et situations. Et pourtant schèmes et énoncés sont deux formes de la manifestation des connaissances. Le lien entre elles est celui de la conceptualisation : c'est l'une des fonctions des invariants opératoires dans la théorie.

Dialectique

La présente théorie est largement inspirée par la dialectique, c'est-à-dire par l'idée que les concepts sont relatifs et dépendent les uns des autres. Une autre manière de le dire est qu'ils forment système.

Il n'est pas difficile de comprendre que **les concepts d'invariant et de variation** sont dialectiquement liés : la relation lexicale entre les deux mots nous invite directement à cette idée. On n'a pas l'un sans l'autre.

Les cas suivants sont moins transparents :

Schème et situation sont dialectiquement liés : il n'y a pas de schème sans situation et pas de situation sans schème. Et pourtant on ne doit pas les confondre, en dépit du fait que le schème contribue à l'identification de la situation, et la situation à l'identification du schème. Prenons un premier exemple dans les gestes : le saut en hauteur est une situation ; le saut en ciseaux un schème, de même que le rouleau dorsal, plus largement pratiqué aujourd'hui par les athlètes de haut niveau que ce n'était le cas il y a un demi-siècle. La recherche d'une quatrième proportionnelle est une situation ; la règle de trois est un schème, c'est-à-dire une certaine forme d'organisation de l'activité pour calculer une quatrième proportionnelle ; elle est différente du schème fondé sur l'utilisation des propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire. L'expression « une situation de type règle de trois » n'est donc pas correcte, pas plus que « le schème du saut en hauteur ». Pourtant ces deux expressions se disent, et il est fréquent qu'on confonde situation et schème, par manque de rigueur, justement parce que ces deux concepts sont dialectiquement liées.

Une autre propriété d'ordre dialectique est que le schème est à la fois **producteur de l'activité et produit de l'activité** (ressource intériorisée et capitalisée). Cette remarque rejoint la thèse de Rabardel et Samurçay concernant l'activité de travail : à la fois productive (produisant des effets sur le monde extérieur) et constructive (produisant des effets sut le sujet agissant). En généralisant un peu, on peut dire que la construction de la personne est le processus dual de l'appropriation du réel. C'est l'activité qui est la principale responsable de cette double construction.

Une autre propriété encore est que le schème est à la fois instrument d'action sur le réel et moyen d'interrogation du réel.

Concept et théorème sont dialectiquement liés : il n'y a pas de théorème sans concepts, puisque ce sont les briques nécessaires à la construction des théorèmes ; et il n'y a pas de concept sans théorèmes puisque ceux-ci sont en fait les propriétés du concept). De la même manière, concept-en-acte et théorème-en-acte sont dialectiquement liés : on n'a pas l'un sans l'autre. Et pourtant il ne faut pas les confondre : les théorèmes-en-acte, propositions tenues pour vraies dans l'activité en situation, sont susceptibles de vérité et de fausseté ; les concepts-en-acte ne sont pas vrais ou faux, seulement pertinents ou non pertinents. Un **réseau sémantique** n'est pas à lui seul une représentation suffisante du cognitif, s'il s'en tient aux liens entre concepts, et ne prend pas en considération les distinctions entre théorèmes, y compris en acte (propositions tenues pour vraies). C'est malheureusement le cas dans la plupart des exemples de réseaux sémantiques cités dans la littérature,

La dialectique outil/objet : Un nouveau concept ou un nouvel ensemble de concepts peut être à la fois un outil pour traiter une situation, et un objet de connaissance, dûment formulé et posé comme tel : par exemple, le concept de fonction n'est pas d'emblée un objet mathématique pour l'élève, pas plus d'ailleurs qu'il ne l'a été d'emblée dans l'histoire des mathématiques. Mais l'outil transformé en objet va lui-même avoir des propriétés qui seront à leur tour des outils. Régine Douady, la première, a développé l'idée que cette **dialectique outil/objet** est un processus fondamental de l'acquisition de nouvelles connaissances, et elle a étudié plusieurs exemples mettant ce processus en évidence en mathématiques.
La transformation d'un outil en objet, voire d'un prédicat en argument, peut être vue comme un processus de réification (Sfard). C'est un aspect essentiel de la conceptualisation puisqu'il permet de tenir la représentation du réel comme le réel lui-même, et de traiter les concepts (voire les signes) comme des objets ; mais il peut conduire à de graves mécomptes si cette

réification se traduit par la minimisation du rôle d'outil des concepts, et de leurs possibilités d'évolution.

A un niveau de généralité plus grand, **développement, apprentissage et expérience sont dialectiquement liés** également, en ce sens qu'ils concourent ensemble à la construction et à l'appropriation des connaissances opératoires, sans qu'il soit toujours possible de dégager le processus le plus actif à tel moment ou à tel autre. C'est surtout pour le long terme du développement qu'il est difficile, voire impossible, de faire la part de l'apprentissage et de l'expérience ; dans le court terme de l'activité en situation, on peut éventuellement observer des moments de découverte, des moments d'apprentissage local, et des moments d'évocation de l'expérience antérieure ; mais même dans ce cas les processus sont en interaction étroite.
L'expérience est un processus incontournable ; cela n'exclut nullement que des phases d'apprentissage y jouent un rôle décisif. Le concept de champ d'expérience a du sens ; **la problématique des champs conceptuels n'a pas pour objet de se substituer à l'idée de champ d'expérience, seulement d'en favoriser l'analyse,** en identifiant des domaines circonscrits d'activité dans le développement desquels on peut saisir des filiations et des ruptures.

Culture et activité personnelle sont parfois pensés comme des facteurs distincts du développement des compétences ; la vérité est qu'ils sont en étroite interaction, comme le sont les schèmes personnels et les schèmes partagés par une même communauté. Invariants opératoires, schèmes et systèmes de signifiants/signifiés peuvent être et sont souvent à la fois sociaux et personnels. Certains d'entre eux constituent de véritables marques distinctives de la personnalité, bien que beaucoup d'entre eux soient communs aux communautés d'appartenance du sujet individuel.