Relations entre conceptualisations dans l'action et signifiants langagiers et symboliques

Symposium latino-américain de didactique de mathématique
Bonito, Brésil

2016 (1-6 novembre)

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2016_Signifiants-Langagiers-Symboliques_Conference-Bonito

Conférence de Bonito 2 novembre 2016

Gérard Vergnaud

3 Relations entre conceptualisations dans l'action et signifiants langagiers et symboliques

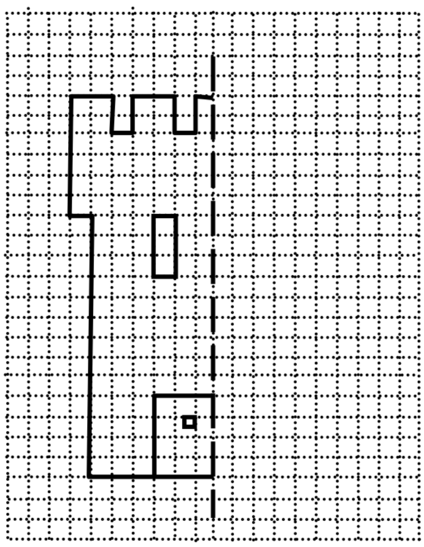
Dans cette partie de mon exposé, je me propose d'illustrer brièvement le fait que la complexité variable de la connaissance concerne à la fois sa forme prédicative et sa forme opératoire ; de telle sorte que ni l'une ni l'autre ne se suffit à elle-même.

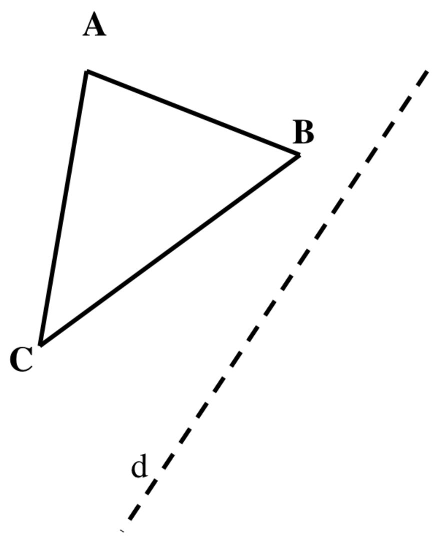
Je me propose également de souligner quelques propriétés de l'algèbre par rapport à l'arithmétique, et de faire valoir sa double fonction : prédicative et opératoire.

Forme opératoire et forme prédicative

Concernant la forme opératoire, on apprécie aisément que la construction par le dessin du triangle symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d en pointillés est plus complexe que le dessin de la seconde moitié de la forteresse.

-On ne dispose pas du papier quadrillé et de la règle simple « un pas à droite si on a un pas à gauche sur le dessin de la figure déjà dessinée », ou « un pas à gauche si on a un pas à droite » ; « un pas en descendant si on a un pas en descendant », ou « un pas en montant si on a un pas en montant »
- l'axe de symétrie est vertical
En lieu et place, il faut des instruments (l'équerre graduée, la règle et le compas éventuellement) et maitriser certaines propriétés de la symétrie ortogonale.





Concernant la forme prédicative, il suffit d'énoncer en portugais et en français certaines des propriétés et relations susceptibles d'être prononcées par l'enseignant pour comprendre que les élèves de collège (de sixième (11 à 12 ans) mais aussi de quatrième (13 à 14 ans) auront du mal à les formuler eux-mêmes, et sans doute à les comprendre.

Forme prédicative en portugais

- **1 - A fortaleza é simétrica**
-
- **2 - O triângulo A'B'C' é simétrico ao triângulo ABC em relação à reta *d***
-
- **3 - A simetria mantém os comprimentos e os ângulos**
-
- **4 - A simetria é uma isometria**

Forme prédicative en français

- **1 La forteresse est symétrique**
-
- **2 le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d**
-
- **3 la symétrie conserve les longueurs et les angles**
-
- **4 la symétrie est une isométrie**
-

Le deuxième énoncé est déjà plus délicat que le premier : il exprime une relation à trois termes alors que le premier énonce une propriété applicable à un terme seulement. Le quatrième énoncé présente une nouvelle difficulté, celle de transformer le prédicat des deux premiers énoncés en un substantif, ce qui fait de lui un nouvel objet de pensée, qui a lui-même des propriétés, celles de conserver les longueurs et de conserver les angles. Un autre saut cognitif est franchi avec le quatrième énoncé puisque les propriétés de conservation sont à leur tour transformées en un nouvel objet, le concept d'isométrie, dont les symétries ne sont qu'une sous-classe. Il faut donc être prudent avant d'affirmer, avec Vygotski, que le concept c'est la signification du mot.

Parlons maintenant d'algèbre

La première remarque à faire est que, tout en s'appuyant sur les connaissances d'arithmétique, l'algèbre représente un important détour formel. On peut caractériser les différences entre l'arithmétique et l'algèbre de la manière suivante

Arithmétique	Algèbre
inconnues intermédiaires	extraction des relations perinentes
choix intuitif des données	expression formelle des énoncés et des opérations
opérations dans le bon ordre	algorithme
contrôlées par le sens	contrôle : règles et modèle adéquat

Un nouveau concept s'impose, celui de script-algorithme, dont voici un des exemples les plus simples :

3x + 14 = 35
- **3x + 14 –14 = 35 – 14**
- **3x = 21**
- **3x / 3 = 21 / 3**
- **x = 7**

Cet algorithme comporte plusieurs opérations élémentaires d'arithmétique que j'ai laissées visibles, volontairement. Même avec ces opérations bien visibles, les élèves ont du mal à apprécier le sens de l'algèbre, problème sur lequel butent beaucoup d'élèves de collège.. On peut traduire cette interrogation en termes de compétences par rapport à l'algèbre. On peut en citer plusieurs, de niveau très différent

- **1-Savoir quoi faire devant une équation donnée**
- **atteindre un certain but , respecter les règles**
- **2-Savoir mettre un problème en équation**
- **extraire les relations pertinentes, contrôler leur indépendance**
- **3-Identifier des objets mathématiques nouveaux**
- **équation et inconnue, fonction et variable**
- **4-Reconnaître certaines fonctions de l'algèbre**
- **résoudre des problèmes malaisés ; prouver une relation**

Ces compétences se situent à des niveaux de conceptualisation très différents

- **1 et 2 reposent sur des schèmes**
- **« le sens c'est les schèmes » selon Piaget**
-
- **3 repose sur des conceptualisations explicites**
-
- **4 est métacognitive**

Comme pour les champs conceptuels vus plus haut, les algorithmes enseignés au collège se situent à des niveaux de complexité relativement contrastés.

- **$a + x = b$**
- **$ax = b$**
- **$ax + b = c$**
- **$ax + b = cx = d$**
- **$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$**
-

Une autre question surgit : est-ce que les élèves utilisent les algorithmes enseignés ou se rabattent-ils sur des schèmes personnels ?

Ils sont parfois obligés : par exemple, Il n'y a pas d'algorithme pour mettre en équation les problèmes formulés en langage naturel ; les élèves ont alors recours à des schèmes personnels, même si on leur donne des suggestions à ce sujet.

La puissance de l'algèbre tient en partie au fait qu'elle est une forme de la connaissance mathématique exceptionnelle : à la fois prédicative et opératoire, elle permet à la fois d'énoncer des objets, des propriétés et des relations (moyennement certaines précautions) et en même temps de traiter ces énoncés pour avancer vers des solutions. C'est ce que Descartes a réussi à montrer, de manière exemplaire et pour la première fois, avec son traité de Géométrie algébrique de 1636.
On peut dire les choses autrement, en distinguant le côté outil et le côté objet de l'algèbre

- **Côté outil**
-
- résolution de problèmes qui sont délicats par l'arithmétique
- formules de géométrie, de physique, de comptabilité et d'économie
- algorithmes de traitement
-
- **Côté objet**
-
- Equation et inconnue
- Fonction et variable
- Nombres relatifs, rationnels, réels
- Monômes, polynômes, système

On sait par exemple que certains mathématiciens, jusqu'au 19ème siècle, ont dénié le statut de nombre aux nombres négatifs. Ils n'en voyaient que le côté outil commode de calcul.
Inévitablement de nombreux élèves de collège ont une réticence avec les nombres négatifs : per exemple s'ils parviennent à une solution négative après un traitement algébrique, ils s'exclament « je me suis trompé !»

Il est donc utile de rechercher des situations pour lesquelles
des solutions négatives auraient du sens .

- Un premier exemple simple
- *La température extérieure est de 2 degrés au-dessus de zéro à 9 heures du matin. Elle a augmenté de 11 degrés depuis 3 heures du matin. Quelle était la température à 3 heures du matin ?*
-
- Un deuxième exemple plus sophistiqué
- *Robert a joué aux billes le matin et l'après-midi. Il a gagné 18 billes l'après-midi. Mais en faisant ses comptes à la fin, il s'aperçoit qu'il a 5 billes de moins que ce qu'il avait le matin avant de commencer à jouer. Que s'est-il passé le matin ?*

Pour ce dernier problème, deux mises en équation sont possibles, inégalement accessibles aux élèves à la fin du collège

- **x + 18 = -5** Il est bien délicat de raisonner directement ainsi

35 + x + 18 = 35 – 5

Que faire ?

Rechercher des situations dont la solution algébrique négative peut être interprétée

- soit comme une transformation négative (perte, dépense…)
- soit comme une relation négative (dette, de moins que…)
- soit comme une abscisse ou une ordonnée négative

En tout état de cause il faut essayer d'éviter les questions qui indiqueraient déjà que le nombre recherché serait négatif . Préférer une forme plu neutre, par exemple :

- ***A-t-il fait un bénéfice ou une perte ? et de combien ?***

Conceptions et symboles sont des instances cognitives distinctes : on ne doit pas confondre conceptualisation et symbolisation, même si les symboles apportent une contribution non négligeable à la conceptualisation

Quelles qualités possibles des signifiants langagiers et symboliques?

- Stabilité et économie (résumé de l'information)
- Proximité sémantique le cas échéant
  entre signifiants, signifiés et invariants opératoires
- Opérationnalité : inférences et calculs

4 Rationalité et situations d'incertitude

Les mathématiques jouent un rôle important dans la formation de la rationalité. On a même parfois tendance à leur accorder un rôle principal et privilégié, comme les modèles mathématiques de la physique tendent parfois à se présenter : on attribue ainsi aux modèles une rationalité qu'on refuse à l'observation et aux découvertes empiriques surprenantes.
Il est donc utile de reprendre la question à partir du développement de l'enfant qui, sans connaître les mathématiques, se forme progressivement des représentations rationnelles des situations dans lesquelles il vit et se développe.

- **Situations aléatoires: on ne peut pas prévoir les événements singuliers.**
- **Situations régulières: on peut prévoir les événements singuliers, mais on n'a pas accès aux processus.**
- **Situations nécessaires: on peut prévoir et on a accès aux processus; mais on ne dispose pas de toutes les catégories conceptuelles pertinentes pour saisir l'information, prévoir ou agir.**

Exemples prototypiques

Aléatoire dés loterie météorologie
Régulier saisons marées cycle lunaire
Nécessaire orientation volume géo euclidienne

On peut expérimenter avec des sujets (enfants ou adultes

ALEATOIRE

deux lampes s'allument selon la loi probabiliste: deux fois la lampe verte pour une fois la lampe rouge

résultat: les sujets s'ajustent progressivement à la proportion 2 sur 3 et 1 sur 3, alors qu'ils auraient intérêt à prédire toujours « vert »

REGULIER

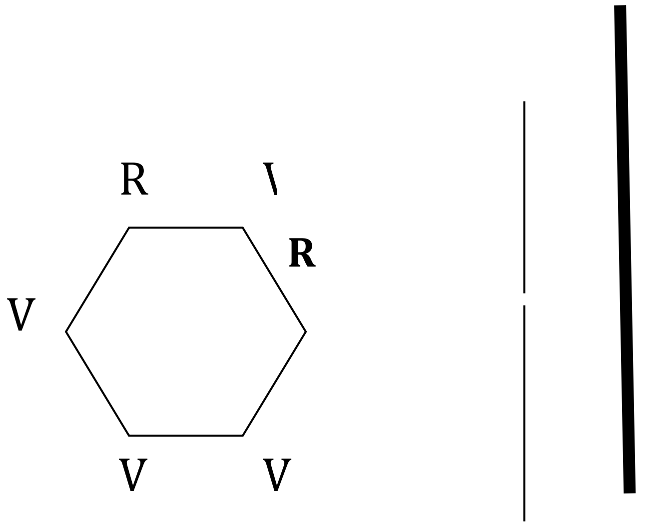
Voici deux exemples

RVVRVVRVV…

RVRVVVRVRVVVRVRVVV…

NECESSAIRE

Exemple de situation nécessaire avec la règle de succession précédente : le petit trou laisse projeter les lumières sur le second écran dans l'ordre RVVVRV ; c'est la rotation qui assure la propriété de nécessité.



Une autre source d'incertitude
L'interférence avec l'action d'autrui ou de déterminants extérieurs

- **Situations productives**: seule l'action propre du sujet détermine les effets et les variations

- **Situations passives**: l'action propre n'a pas d'effet; les seuls déterminants sont extérieurs (typiquement l'astronomie)
- **Situations interactives**: les variations dépendent à la fois de déterminants extérieurs et de l'action pro

Une approche développementale de la construction de la rationalité conduit à ne pas les confondre.
D'où le tableau ci-dessous et la thèse que la rationalité se développe d'abord dans les situations nécessaires et productives.
l'incertitude due à autrui pourrait être réinterprétée et confondue avec les trois catégories princeps vues plus haut;
c'est dans les situations interactives et aléatoires qu'on peut situer l'impact de la théorie des jeux

	Nécessaires	**Régulières**	**Aléatoires**
Productives	X		
Passives			
Interactives			Théorie des jeux