



Gérard Vergnaud

Recherches en psychologie didactique

Ce document est issu du
site officiel de Gérard Vergnaud

www.gerard-vergnaud.org

Ce document a été numérisé afin de rester le plus fidèle possible à l'original qui a servi à cette numérisation. Certaines erreurs de texte ou de reproduction sont possibles.

Vous pouvez nous signaler les erreurs ou vos remarques via le site internet.

Le placement de données numériques ou quasi numériques sur une droite

**In Colloque A.S.I. 9
à la demande de Régis Gras**

2017 (octobre)
Belfort, France

Lien internet permanent pour l'article :
https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_2017_Placement-Donnees-Droite_Colloque-Belfort

Ce texte est soumis à droit d'auteur et de reproduction.



Programme scientifique du colloque A.S.I. 9 - 2017 Belfort – France



Belfort octobre 2017

Le placement de données numériques ou quasi numériques sur une droite.

L'exemple que je vais analyser maintenant intéresse justement de nombreux domaines, aussi bien de sciences humaines que de sciences physiques ou biologiques : témoins l'histoire, avec la frise historique, ou encore l'économie et la géographie, avec l'usage abondant de graphiques. La raison en est que le concept mathématique de droite numérique, c'est-à-dire de représentation des nombres réels par une droite orientée, fondement de la synthèse conceptuelle entre la géométrie et l'algèbre, s'est révélé productif pour toutes les représentations symboliques utilisant les propriétés métriques et les propriétés ordinales de l'espace.

L'étude des difficultés des élèves, et des conceptualisations laborieuses qu'ils doivent élaborer dans des situations de représentation de données, permet de comprendre des aspects essentiels de la genèse de cette construction culturelle. Ce qui est tenu pour transparent par certains enseignants, ne l'est évidemment pas pour les enfants. Le cadre théorique des champs conceptuels permet de suivre certaines étapes du processus d'appropriation.

Dans une recherche menée auprès de six classes de CM2, de sixième et de cinquième, nous avons demandé aux élèves de placer sur une bande de papier de 60 cm de long, soit des poids de bébés à la naissance, soit des âges d'enfants gardés à domicile par une professionnelle de la garde d'enfants, soit des lancers de javelot de sportifs de haut niveau, soit enfin des dates de naissance. Les feuilles n'étaient pas graduées à l'avance, et une ligne droite tracée tout au long de la feuille était le seul repère. On demandait aux enfants de graduer cette ligne en prenant soit un cm pour 100 grammes dans le cas des poids de bébés, soit un cm pour un mois dans le cas des âges d'enfants et des dates de naissance, soit un cm pour 10 cm dans le cas des lancers de javelot.

Dans deux cas, compte tenu de la longueur de la feuille, de l'échelle, et des données proposées aux élèves, il était possible de placer sur la bande à la fois le zéro-origine et les sept données proposées :

- bébés : 800 g, 1 kg et 700 g, 1 kg et 900 g, 3 kg et 100 g, 3 kg et 450 g, 3 kg et 700 g, 4kg et 400 g ; échelle 1 cm pour 100 grammes ;
- âges d'enfants : 8 mois, 1 an et 7 mois, 1 an et 11 mois, 3 ans et 1 mois, 3 ans et 4 mois et demi, 3 ans et 7 mois, 4 ans et 4 mois ; échelle 1 cm pour 1 mois ;

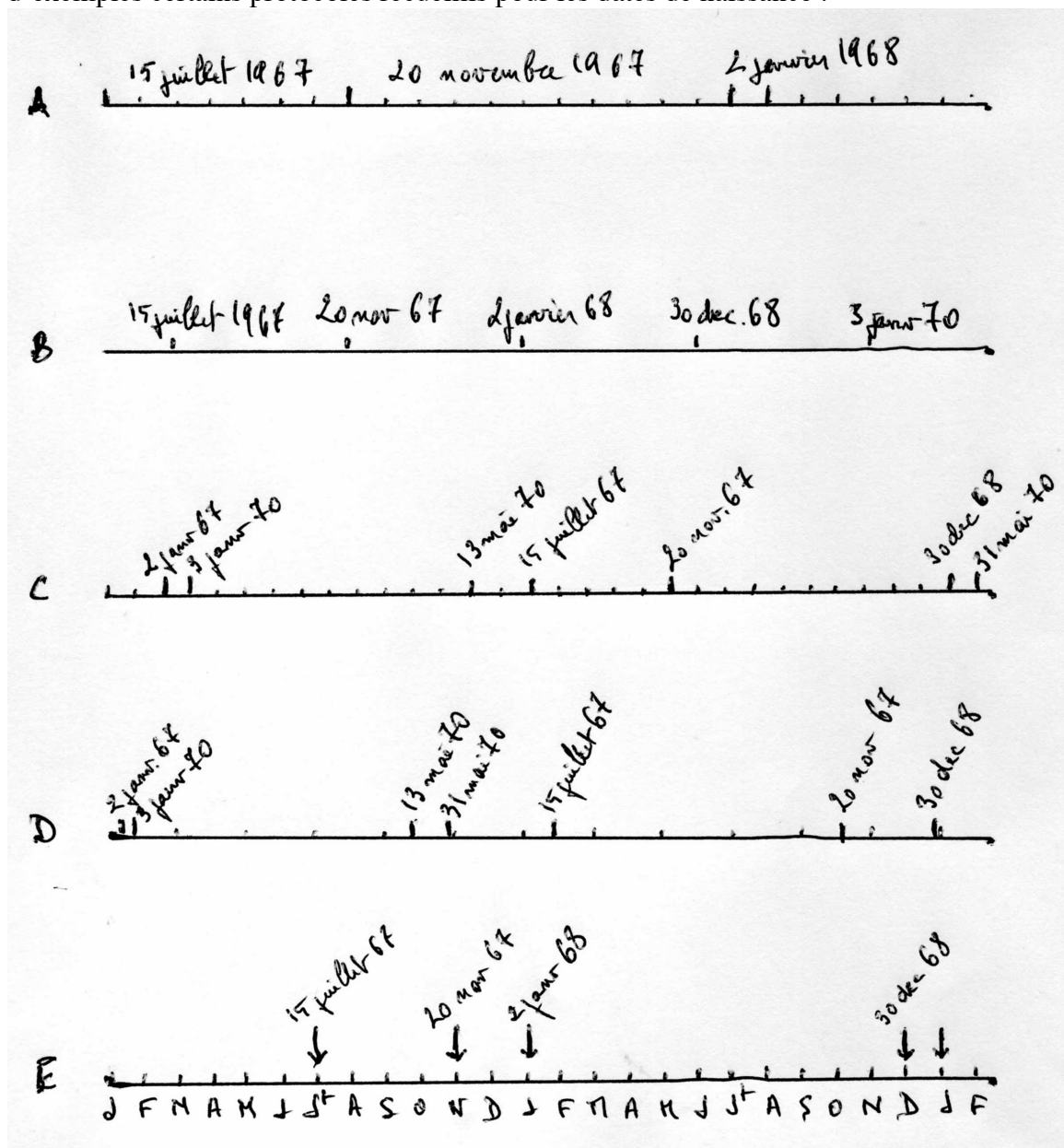
Dans les deux autres cas, c'était impossible : l'échelle choisie ne permettait pas de placer le zéro, et aucune origine naturelle n'était précisée :

- lancers de javelot : 67 mètres et 75 cm, 67 m et 90 cm , 68 m et 10 cm, 68 m et 95 cm, 70 m et 10 cm, 70 m et 55 cm, 70 m et 60 cm ; échelle 1 cm pour 10 cm ;

- dates de naissance : 15 juillet 1967, 20 novembre 1967, 2 janvier 1968, 30 décembre 1968, 3 janvier 1970, 13 mai 1970, 31 mai 1970 ; échelle 1 cm pour 1 mois.

Nous faisons l'hypothèse que les deux dernières situations seraient d'une difficulté plus grande que les deux premières, en raison justement du problème délicat de l'origine. En même temps nous cherchions à apprécier si les données temporelles (âges, dates de naissance) rendaient la tâche plus facile ou plus difficile.

La variété des productions des enfants est à elle seule impressionnante puisque, placés devant une situation inhabituelle pour eux les élèves improvisent et font feu de tout bois. Voici à titre d'exemples certains protocoles recueillis pour les dates de naissance :



Dans le protocole A, les dates sont représentées par des segments de droite mis bout à bout, dont la longueur correspond au 7^{ème} mois de l'année (juillet), puis au onzième (novembre), etc. Le jour et l'année ne sont pas pris en compte.

Dans le protocole B, seul est retenu l'ordre des dates de naissances, lesquelles sont placées à intervalles réguliers, sans souci des différences de durée entre dates.

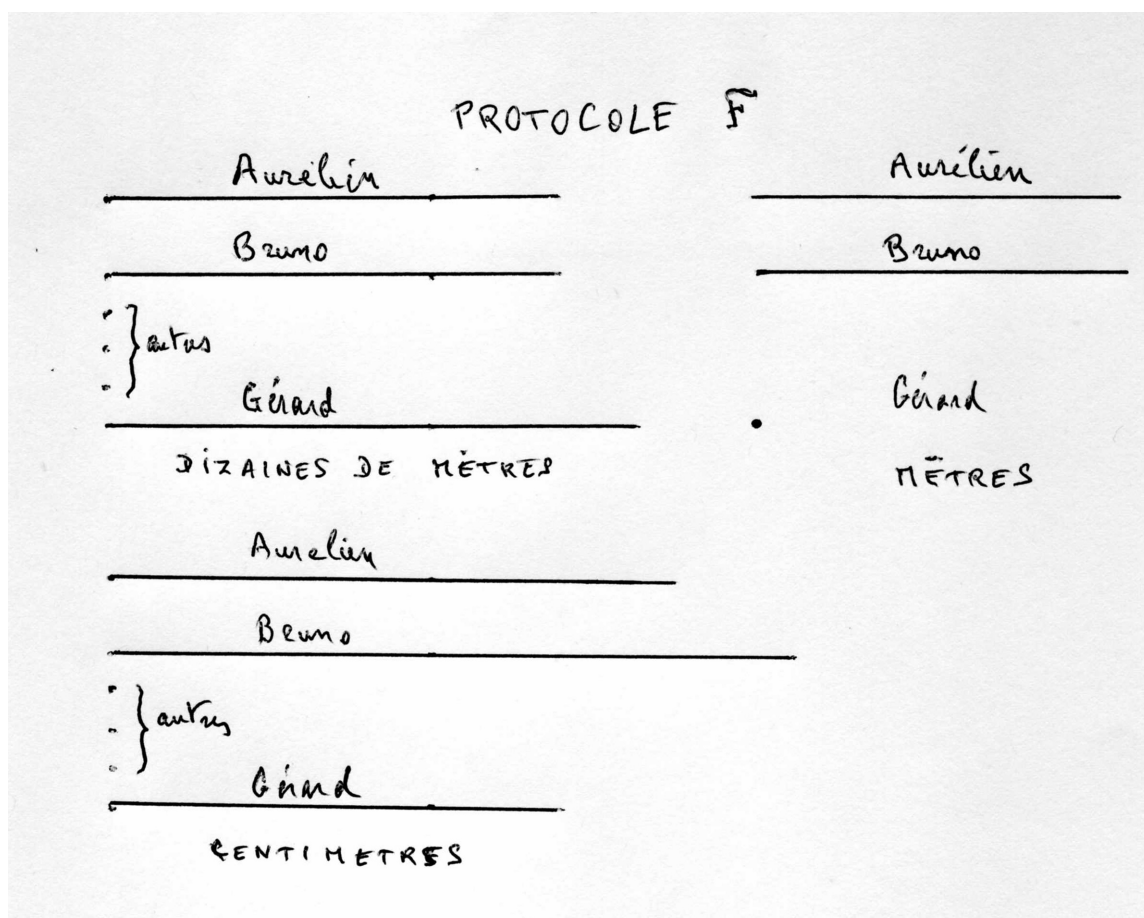
Dans le protocole C, seul le jour du mois est retenu ; le mois et l'année ne sont pas pris en compte.

Dans le protocole D, les dates sont projetées comme des anniversaires sur une seule année. Un effort est fait pour distinguer deux dates du même mois, comme le 13 mai et le 31 mai.

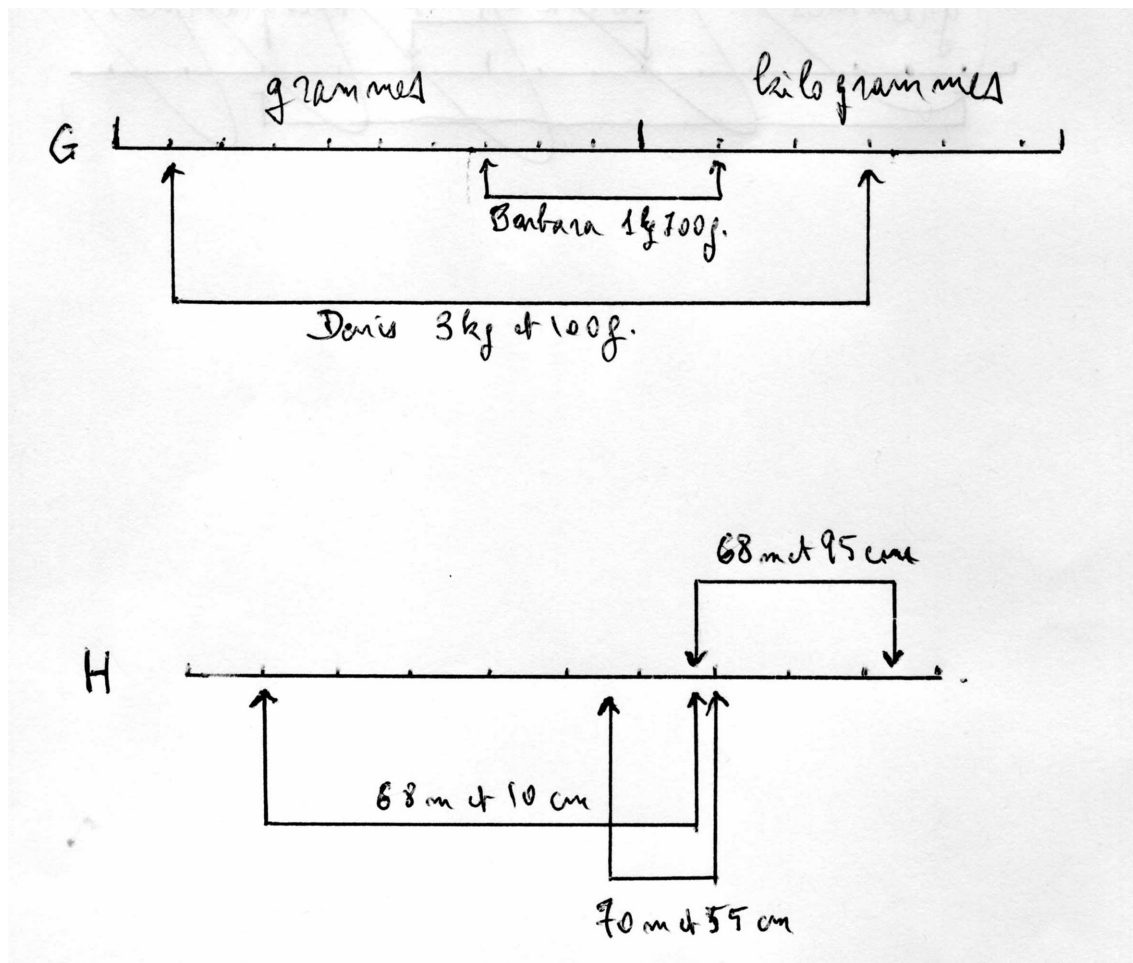
Dans le protocole E, un effort est fait pour retenir un ensemble de dates sur plusieurs années, mais les mois sont représentés par des points, et non par des intervalles, de telle sorte que l'on a une échelle d'ordre, issue de la récitation de la suite des mois. Ce type de protocole constitue évidemment un progrès par rapport au protocole B, mais comme lui, il n'utilise, comme marques, que les propriétés ordinales du signifiant spatial.

On observe d'autres solutions, surprenantes et néanmoins très systématiques, comme si les élèves, après avoir imaginé une manière d'interpréter la situation de manière totalement opportuniste, devenaient, avec cette interprétation, totalement méthodiques dans son application.

Voici plusieurs cas intéressants :



F Décomposition de chaque lancer de javelot en trois parties



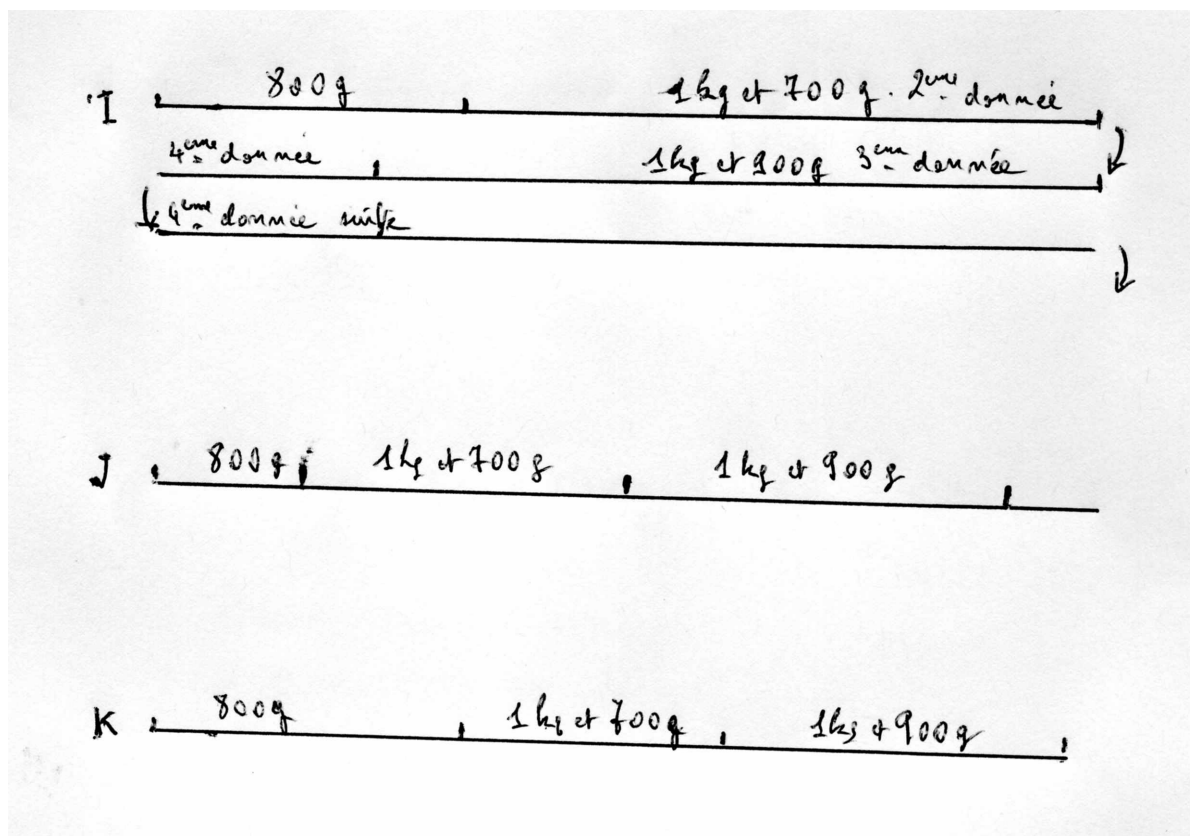
G Deux échelles séparées pour les kilogrammes et les grammes

H Même échelle de 0 à 100 pour les mètres et les centimètres

Tous ces cas de figure pourraient être considérés comme des anecdotes, mais certaines difficultés sont visiblement récurrentes, comme la coordination des systèmes d'unités : kilogrammes et grammes, mètres et centimètres, mois jours années. D'autres difficultés sont moins immédiatement visibles, qui éclairent pourtant de manière intéressante l'appropriation progressive de ce système de représentation, sa « genèse » en quelque sorte. Ce qui suit vise à en rendre compte.

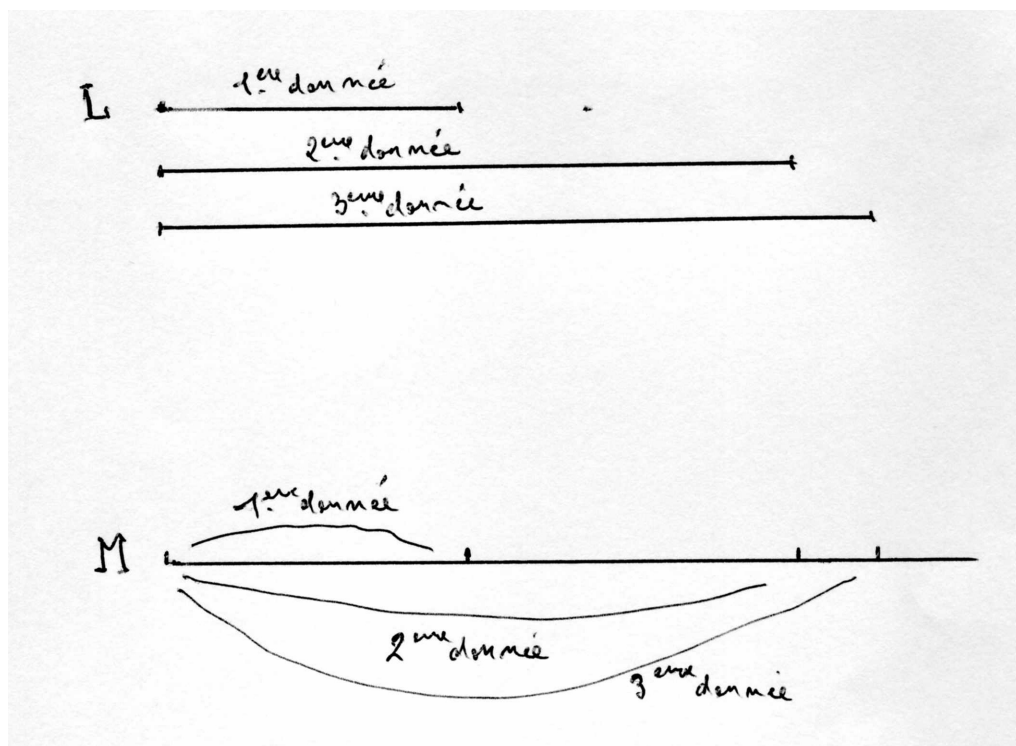
1-Certains protocoles recueillis ne représentent que l'ordre des données, de la plus petite à la plus grande, soit par un point pour chaque donnée, soit par des régions ordonnées de l'espace de gauche à droite en général. Le protocole B en est un exemple.

2-Un grand nombre de productions d'élèves résultent de la mise bout à bout de segments de droite représentant les données, l'une après l'autre. C'est le cas pour les données mesurables comme les poids de bébés ou les lancers de javelot ; mais, de manière surprenante, c'est aussi le cas pour les dates de naissance comme nous l'avons vu avec le protocole A.



Comme la place manque pour mettre bout à bout les segments de droite représentant les données, les élèves peuvent soit continuer sur plusieurs lignes les segments incomplets (protocole I), soit changer d'échelle (protocole J), soit encore ne placer bout à bout que les parties décimales des données (protocole K).

3- Une prochaine catégorie de productions est issue du souci de placer ces segments l'un au-dessus de l'autre à partir d'un même repère de départ ; ou bien du souci d'indiquer que la deuxième donnée n'est pas représentée seulement par la partie nouvelle, mais aussi par le segment correspondant à la première donnée.



On peut caractériser cette étape comme l'adoption, en acte, du principe d'inclusion des signifiants (les segments de droite représentant les données).

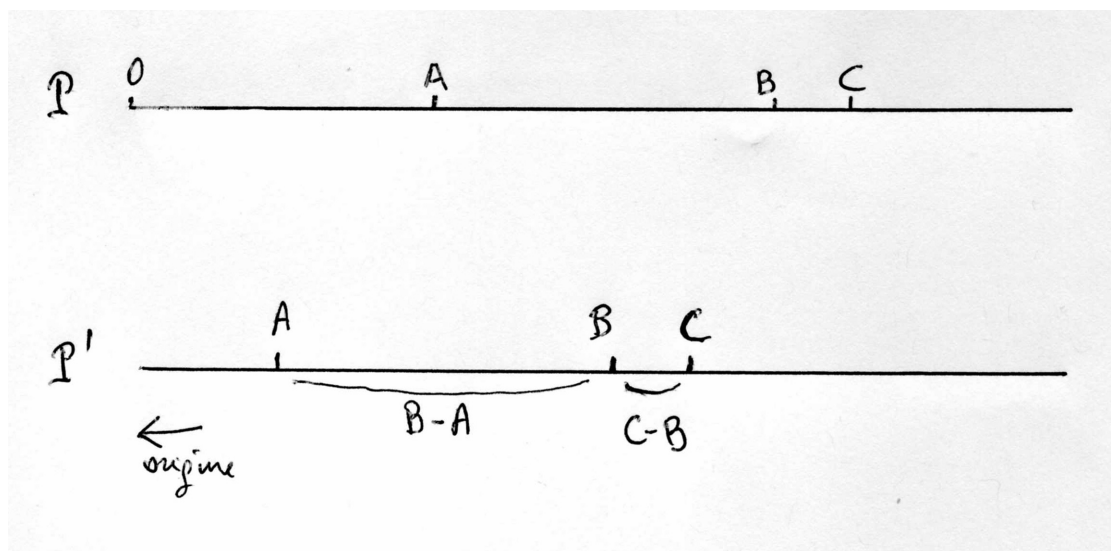
C'est un progrès important, mais cette solution graphique n'est pas satisfaisante puisqu'elle ne fonctionne qu'à la condition que le repère de départ soit considéré comme invariant. Or justement, il n'a pas encore le statut d'origine.

4-La prochaine catégorie de productions marque donc un nouveau saut conceptuel, l'adoption du principe de ponctualisation : comme ils ont un même point de départ à gauche, les segments emboîtés sont en correspondance biunivoque avec leurs extrémités à droite, et il est donc possible de faire jouer à ces points d'arrivée le rôle de signifiants joué par les segments.

L'avantage de cette solution est que l'élève récupère de manière simple, avec la succession des points, la propriété d'ordre que certains élèves s'étaient contentés de représenter, comme dans le protocole B. Sont ainsi coordonnées les propriétés mesurables et les propriétés d'ordre du signifiant spatial, qui représentent ainsi les propriétés correspondantes des données numériques (poids de bébés) ou quasi-numériques (âges des enfants). Dans ces deux cas, heureusement pour les élèves, l'échelle choisie permet de représenter à la fois l'origine et les données.

Le protocole P ci-après illustre cette étape.

Le protocole P' va plus loin, et représente une nouvelle étape dans la conceptualisation, justement parce que, cette fois, l'échelle proposée ne permet pas de placer à la fois l'origine et les données sur la même bande de papier : des lancers de javelot de plus de 60 mètres avec une échelle de 1 cm pour 10 cm, Il faut alors repousser l'origine en dehors de la feuille.



5-Cette dernière grande étape est donc celle dans laquelle l'enfant place la première donnée quelque part à gauche, soit le point A, puis la seconde donnée B à partir de A, à une distance égale à la différence B-A ; et ainsi de suite pour C, D et les autres données. Les intervalles entre points représentent des différences.

Tout se passe comme si l'élève avait alors effectué un changement d'origine.

Conclusion : La droite numérique n'est pas un système de représentation transparent pour les élèves, mais résulte d'une lente construction, plus délicate qu'il n'y paraît.

Cette construction, opérée par les élèves avec l'aide de l'enseignant, demande que soient levées plusieurs interprétations restrictives. Comment un segment de droite peut-il représenter à la fois une donnée et une partie d'autres données ? Comment un nombre peut-il être associé à un point alors que le point a une mesure nulle ?

Après une séquence didactique de plusieurs heures, sur plusieurs semaines, ces interprétations sont levées pour certains élèves, pas pour tous. Même chez certains élèves de cinquième, des ambiguïtés demeurent.

L'exemple de la droite numérique, et des représentations graphiques qui lui sont associées, illustre ainsi le fait que les processus de conceptualisation concernent les systèmes de signifiants transmis par la culture, et pas seulement les contenus conceptuels représentables par ces signifiants. Le paradoxe est que les signifiants contribuent à la conceptualisation alors qu'ils ne sont pas transparents. C'est en rendant explicites certaines propriétés et relations pertinentes des signifiés représentés, qu'ils contribuent à la conceptualisation. Pour saisir ces processus paradoxaux, il faut identifier avec soin quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié : ainsi en est-il, pour la droite numérique, des propriétés mesurables de l'espace et de ses propriétés d'ordre.

Le diagramme ci-dessous résume les plus importantes étapes du processus de conceptualisation nécessaire :

